venerdì 9 ottobre 2020 08:23

Proposizione 1.27 (**) $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$

Proposizione 1.28 ("Principio del buon ordinamento") (**) $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ ha un minimo

Def Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ha MINIMO se $\exists\, m \in A \mid m \leq x, \forall x \in A$. Tale m si chiama minimo di A e si denota $\min A$.

Ovviamente non tutti gli insiemi hanno minimo: ad esempio $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$

$\underbrace{A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}}$. non ha minimo.

Es ↑ dimostrare! Supponiamo, PER ASSURDO, che A abbia minimo $\exists\, m \in A \mid m \leq x \ \forall x \in A$

e $1 < m < 2$ ma $\bar{x} := \frac{m+1}{2}$ e $1 < \bar{x} < m$

ma $1 < \bar{x} < m < 2 \Rightarrow \bar{x} \in A$ e $\bar{x} < m \Rightarrow$ CONTRADDIZIONE.

DEF • Analog si definisce il $\max A$ (quando esiste)

DEF Un numero M si dice MAGGIORANTE per $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, se $M \geq x \ \forall x \in A$

(NB un maggiorante può non appartenere ad A. Se un maggiorante M di A, $M \in A$

$\Rightarrow M$ è il massimo di A)

Analog. si definiscono i MINORANTI di un insieme A

• A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se ha un maggiorante

" " INF — " " " minorante.

" " se è limitato infer e super

NB (esercizio facile!) Se il massimo (o il min.) esiste è unico

Corollario 1.29 (**) Se $A \subseteq \mathbb{N}$, non vuoto e $M \in \mathbb{N}$ è un maggiorante di A allora A ha massimo

NB Finora non si usa il XVI assioma

Es (Corollario 1.26) $n, m \in \mathbb{N}$ e $n > m \Rightarrow n \geq m+1$.

Supponiamo, p.a., che la tesi sia falsa $\Leftrightarrow n < m+1$ ma per ipotesi $m < \underset{\in \mathbb{N}}{n} < m+1$

ma questo contraddice la Proposizione 1.25.

SUCCESSIONI (a valori in A)

Def. Una successione f è una funzione $f: \mathbb{N} \to A$ (A noi interessa particolarmente il caso $A = \mathbb{R}$)

$f: n \in \mathbb{N} \mapsto f_n \in A$ (notazione standard).

Nel caso di $A = \mathbb{R}$ una successione $x: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ si denota con $\{x_n\}$

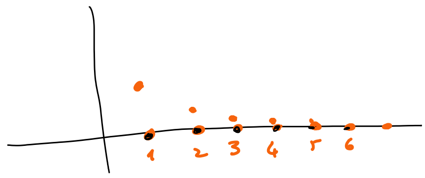
simbolo da NON confondere con $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

↑ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

↑ è una funzione cioè un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Esempi di successioni

$x_n = \frac{1}{n}$



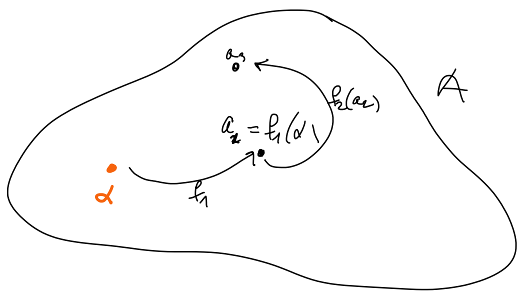
$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = \frac{64}{27}$, ...

TEOREMA DI RICORSIONE (Teo. 1,31) (**)

Sia A un insieme non vuoto, Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia data una funzione $f_n : A \to A$.
Sia $\alpha \in A$. Allora $\exists !$ successione $\{a_n\}$ in A t.c.

(esiste ed è unica)

$$\boxed{\begin{cases} (i) & a_1 = \alpha \\ (ii) & a_n = f_n(a_{n-1}), \ \forall n \geq 2 \end{cases}}$$



DEFINIZIONI RICORSIVE

(1) Data una successione $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$. ($a_n = \frac{1}{n}$, oppure $b_n = \frac{1}{n^2}$, ...)

Definiamo la "sommatoria di a_k per k che va da 1 a n" σ_n definita come:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_1 \\ \sigma_n = \sigma_{n-1} + a_n & \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_1 = \alpha \\ \sigma_n = f_n(\sigma_{n-1}) \end{cases}}$$

Tale definizione è ben posta grazie al teorema di ricorsione con

$A = \mathbb{R}$, $\alpha = a_1$, $f_n(x) = a_n + x$

$\sigma_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$

σ_n si denota $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(2) Analog per il prodotto. Dati $\{a_n\}$ di numeri reali

$$\pi_n := \prod_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}_{\text{intuitivamente}}$$

Rigorosamente $\begin{cases} \pi_1 := a_1 \\ \pi_n := \pi_{n-1} \cdot a_n , & \forall n \geq 2 \end{cases}$

usando il teorema di ricorsione con $A = \mathbb{R}$, $\alpha = a_1$, $f_n(t) = a_n \cdot t$

(3) $n! = n$ fattoriale $:= n(n-1)!$, $1! := 1$, $0! := 1$

Esempi $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ...

(4) x^n definito ricorsivamente come $\begin{cases} x^1 := x \\ x^n := x^{n-1} \cdot x & \forall n \geq 2 \end{cases}$

($n \in \mathbb{N}$) Dato $x \in \mathbb{R}$. | $x^{\cdot} := x^{\cdot} \cdot x$,

o anche $x^n = \prod_{k=1}^{n} x$

usando (2)

ES. $n = \sum_{k=1}^{n} 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (*)

$\mathbb{N}$ usando (1)

<u>Dimostrazione per induzione</u>

(i) "base induttiva" $n=1$ $\underbrace{\sum_{k=1}^{1} 1}_{\sigma_1} = 1$ ✓

(ii) assumiamo che $n = \sum_{k=1}^{n} 1$. Allora, $\sum_{k=1}^{n+1} 1 := 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{\sigma_n} = 1 + n$ ✓

def di sommatoria

ES 1.15 Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n$

Per induzione

$n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

Assumiamo che $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$ Allora, $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = n+1 + \frac{n(n+1)}{2}$

definizione di sommatoria

$= (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(2+n)}{2}$ ✓

Osservazione del Gauss di 4 anni

$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = S$

$100 + 99 + 98 + \dots + 1 = S$

$101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 2S$

$101 \cdot 100 = 2S$

$S = 101 \cdot 50 = 5050$

Proposizione 1.36 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ si ha

(i) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(ii) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

(iii) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Def $x \neq 0$, $x^0 = 1$

Dim Per induzione

(i) <u>per induzione su m</u>. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che $\forall m$ $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

$m = 1$ $x^n \cdot x^1 = x^n \cdot x = x^{n+1}$

definizione di x^n, $\forall n$.

Assumiamo che $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ Allora $x^{n+(m+1)} = x^{(n+m)+1} = x^{n+m} \cdot x = x^n \cdot \underbrace{x^m \cdot x}$

(definizione di x^n)

$= x^n \cdot x^{m+1}$ . .

(ii) Per induzione su m (fissato n). $(x^n)^1 = x^n = x^{n \cdot 1}$

Assumiamo $(x^n)^m = x^{n m}$. Allora $(x^n)^{m+1} = (x^n)^m \cdot x^n = x^{n \cdot m} \cdot x^n \underset{(i)}{=} x^{n \cdot m + n} = x^{n(m+1)}$ ✓

(iii) Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n=1$ è ovvio.

Assumiamo $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$. Allora, $x^{n+1} \cdot y^{n+1} \underset{(i)}{=} (x^n \cdot x)(y^n \cdot y) = (x^n \cdot y^n) \cdot (xy)$

$= (xy)^n \cdot (xy) =$

$= (xy)^{n+1}$ ☒