ALTRI CRITERI DI CONVERGENZA

Criterio di CONDENSAZIONE di Cauchy per SERIE A TERMINI POSITIVI.

Assumiamo che a_n sia decrescente cioè $a_{n+1} \le a_n$, $\forall n$.

$$(a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (\underbrace{a_8 + a_9 + a_{10} - + a_{15}}_{8 = 2^3}) + (\underbrace{a_{16} + \cdots}_{2^4}$$

$\#$ $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$

$a_2 \ge a_3$ più grande (perché decrescente)

$$\le a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + 2^3 a_8 + 2^4 a_{16} + \cdots + 2^n a_{2^n} + \cdots$$

Segue che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \Rightarrow$ se diverge

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = +\infty \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \sum 2^n a_{2^n} < +\infty \Rightarrow \sum a_n < \infty}$

$$\rightarrow \; a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16}) + (a_{17} + \cdots + a_{32}) + \cdots$$

$1 = 2^0$, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4

$$\ge a_1 + 1 a_2 + 2 a_4 + 2^2 a_8 + 2^3 a_{16} + 2^4 a_{32} + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} + \cdots$$

2^0, $n=1$; $\frac{1}{2} 2^2$, $n=2$

$$\ge a_1 + \sum_{1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

non dice $\sum a_n < +\infty \Rightarrow \sum 2^n a_{2^n} < +\infty$

Quindi,

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Per confronto

$$\boxed{\sum_{1}^{\infty} a_n \approx \sum_{1}^{\infty} 2^n a_{2^n}} \qquad (a_n \to 0) \quad a_n \text{ decrescente}$$

$a_n \le b_n \quad \forall n \ge N$

$\sum_N^{\infty} a_n \le \sum_N^{\infty} b_n$

se $+\infty \Rightarrow +\infty$

$\sum_N^{\infty} a_n \le \sum b_n < \infty$

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

Sia a_n una successione decrescente di numeri allora si ha

Applicazioni

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

se $\alpha \le 0$ $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0 \Rightarrow$ la serie diverge

Interessano i valori $\alpha > 0$. Già sappiamo che $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ e che $\boxed{\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty}$

per confronto con $\sum \log(1 + \frac{1}{n}) \to +\infty$

$\alpha \in (1,2)$

Rimane $\alpha \in (1, 2)$

$$\sum \frac{1}{n} \approx \sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$$

$$\sum_1^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log(n+1) \to +\infty$$

Per Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \approx \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$$

serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$

che converge $\iff \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$

$$\iff 2^{\alpha-1} > 1 \iff \boxed{\alpha > 1}$$

per confronto con la serie di MENGOLI

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_2^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_2^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\boxed{\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2} \implies \underline{\sum \frac{1}{n^\alpha}} \le \underline{\sum \frac{1}{n^2}}$$

$\alpha \ge 2$ — converge

$0 < \alpha < 1$

$$+\infty \leftarrow \sum_1^N \frac{1}{n} < \sum_1^N \frac{1}{n^\alpha} \to +\infty$$

$n^\alpha < n$

Teorema $\boxed{\zeta(\alpha) < \infty \iff \alpha > 1}$

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

ES.
$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

Il criterio della radice (e quindi del rapporto) non dicono nulla

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n(\log n)^\alpha}} \to 1 \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1, \quad \sqrt[n]{(\log n)^\alpha} \to 1$$

NB

$0 < c \le a_n \le n \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$

$$\sqrt[n]{c} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{n}$$

$$\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$$

$$1 \qquad\quad 1 \qquad\quad 1$$

Applichiamo CAUCHY

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \approx \sum_2^{\infty} \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n}(\log 2^n)^\alpha} = \sum_2^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \zeta(\alpha)$$

$< +\infty \iff \alpha > 1$

$< \infty \iff \alpha > 1$

ES. Studiare la serie
$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n(\log(\log n))^2}$$

$\log 2 > 0$

$2 > 1$

Uso Cauchy:
$$\sum_2^{\infty} \frac{2^n}{\cancel{2^n}(\log(\log 2^n))^2} = \sum_2^{\infty} \frac{2^n}{\cancel{2^n}(\log(n \log 2))^2}$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\log n + \log\log 2)^2}$$

diverge

Sappiamo che $\frac{\sqrt{n}}{\log n + \log\log 2} \to +\infty$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\log n \left(1 + \frac{\log\log 2}{\log n}\right)} \to +\infty$$

$\frac{\sqrt{n}}{\log n + \log\log 2} > 1$ definitivamente $\sim \frac{\sqrt{n}}{\log n} \to +\infty$

$$+\infty = \sum \frac{1}{(\log n + \log\log 2)^2} \geq \sum \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{(\log n + c)^2} \underset{\text{Cauchy}}{\sim} \sum \frac{2^n}{(\log 2^n + c)^2} = \sum \frac{2^n}{(n \log 2 + c)^2}$$

per la radice $\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n \log 2 + c)^2}} \to 2 > 1.$

Criteri per serie a termini in $\mathbb{R}$. $a_n \in \mathbb{R}$.

- Conosciamo il criterio di convergenza ASSOLUTA $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n \in \mathbb{R}$

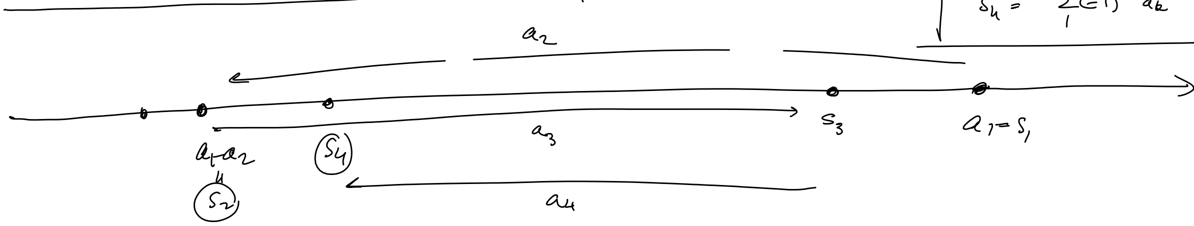
Sappiamo, ad esempio, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mentre $\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Criterio di Leibniz $\quad a_n \geq 0 \quad 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ e $\lim a_n = 0$

Allora $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

Idea della dimostrazione. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + \dots$

$s_n = \sum_{1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$



$S_{2k} \nearrow \qquad \swarrow S_{2k+1}$

- S_{2k} è crescente $\qquad S_{2k} \nearrow \alpha$
- S_{2k+1} è decrescente $\qquad S_{2k+1} \searrow \beta \qquad \alpha \leq \beta.$
- $S_{2k} < S_{2k+1}$
- $\underset{\beta}{\underset{\downarrow}{S_{2k+1}}} - \underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{S_{2k}}} = \underset{0}{\underset{\downarrow}{a_{2k+1}}} \Rightarrow \alpha = \beta.$
- $S_n \longrightarrow \alpha$

Es. 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{x^n}{2+x^{2n}}\right)}_{a_n}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum |a_n| = \sum \frac{|x|^n}{2+x^{2n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{2+x^{2n}}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{2+x^{2n}}} \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & |x|>1 \end{cases}$$

$|x|=1$ non converge.

$\left.\begin{array}{ll} |x|<1 & \text{converge.} \\ |x|>1 & \text{converge.} \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\sum \frac{x^n}{2+x^{2n}}$ converge assolutamente per $x \neq \pm 1$

rimane $x = \pm 1$

se $x = \pm 1$ non converge $\qquad \displaystyle\sum \frac{(\pm 1)^n}{2+1} = \frac{1}{3} \sum (\pm 1)^n \begin{cases} +\infty & x=+1 \\ \text{indeterminata per } x=-1 \end{cases}$

$$e^{x} := \lim_{n\to+\infty} e^{r_n} \text{ con } r_n \in \mathbb{Q},\ r_n \to x$$

$\left.\begin{array}{l} e^{x} \underset{\text{Teorema}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \cos x := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array}\right\}$ Es. 2 studiare la conv

---

Es 2. $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Studiamo il valore assoluto $\displaystyle\sum \frac{|x|^k}{k!}$

rapporto (per la presenza del fattoriale) $\qquad \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \dfrac{k!}{|x|^k}$

$|x| \ldots \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$= \frac{|x|}{k+1} \to 0$

$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ conv. assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

Teorema $E(x) = \exp(x) = e^x$ da dimostrare (venerdì)

Analogamente (per rapporto) convergono assolutamente le serie che definiscono cos e sin x

---

CRITERIO DI ABEL-DIRICHLET

Siano $b_n \in \mathbb{R}$ t.c. $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ sia limitata (ossia $\sup_n |B_n| < \infty$)

e sia $a_n \geq 0$ una successione decrescente con lim $a_n = 0$.

Allora $\sum_1^{\infty} b_n a_n$ converge ed infatti $\sum_1^{\infty} b_n a_n = \sum_1^{\infty} B_n (a_n - a_{n+1})$

A-D $\Rightarrow$ Leibniz

$\sum \underbrace{(-1)^{n-1}}_{b_n} a_n$ converge

$a_n \downarrow 0$

$B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \Rightarrow |B_n| \leq 1, \forall n$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

$B_n = \begin{cases} 1 & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$

$= \sum_1^{\infty} B_n (a_n - a_{n+1})$ $n = 2k-1$

$= \sum_1^{\infty} (a_{2k-1} - a_{2k})$

$\stackrel{\checkmark}{=} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 +$

N.B. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$= 1 + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \dots \stackrel{?}{=} 1$

$= (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0$

Morale i raggruppamenti sono leciti solo per serie a termini positivi.

Lemma (Somma per parti) Siano $b_1, \dots, b_N, a_1, \dots, a_N$ numeri reali. Sia

$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ($\forall n \in N$). Allora

$\sum_{n=1}^{N-1} b_n a_n = B_{N-1} a_N + \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_n - a_{n+1})$, $\forall N \geq 2$

Dim (*)

($B_{N-1} a_N + \sum_{k=1}^{N-1} B_n (a_n - a_{n+1})$

$$= B_{N-1} a_N + \sum_{n=1}^{N-1} B_n a_n - \sum_{n=1}^{N-1} B_n a_{n+1}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow B_n - B_{n-1} = b_n, \quad B_1 = b_1$$

$$= B_{N-1} a_N + \sum_{n=1}^{N-1} B_n a_n - \sum_{2}^{N} B_{n-1} a_n$$

$$= B_{N-1} a_N + B_1 a_1 + \sum_{n=2}^{N-1} B_n a_n - \sum_{2}^{N-1} B_{n-1} a_n - B_{N-1} a_N$$

$$= \cancel{B_{N-1} a_N} + b_1 a_1 + \sum_{n=2}^{N-1} (\underbrace{B_n - B_{n-1}}_{b_n}) a_n - \cancel{B_{N-1} a_N}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} b_n a_n . \quad \square$$

Per il limite $\sum_{1}^{N} b_n a_n = B_N a_{N+1} + \sum_{1}^{N} B_n (a_n - a_{n+1})$

$B_N a_{N+1} \to 0$

$|B_N| \le M = \sup |B_n|$

e $\sum_{1}^{\infty} B_n (a_n - a_{n+1})$ è assolutamente convergente

infatti $\sum_{1}^{\infty} \left| \underbrace{B_n}_{M} (a_n - a_{n+1}) \right| \le M \sum_{1}^{\infty} | a_n - a_{n+1} | = M \sum_{1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = M a_1 . \boxtimes$

$a_1 - \cancel{a_2} + \cancel{a_2} - a_3 + \cdots$