1 - Introduzione

sabato 19 settembre 2020 16:36

www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_20_21/AM110_20_21.htm

2

1. NUMERI

?

NATURALI $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

?

INTERI $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

?

RAZIONALI $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \}$

cosa significa p/q ?

numero di Nepero

REALI $\mathbb{R} = ?$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\underbrace{\sqrt{2}, \pi, e, e^{\pi}}_{\text{IRRAZIONALI}}$, π^e ?

(COMPLESSI $\mathbb{C}$)

"facile"

(2) **Teorema $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$** (Euclide IV sec A.C.)

Dim Supponiamo, PER ASSURDO, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ coprimi

$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ pari (se p è dispari $\Rightarrow p^2$ è dispari)

$\Leftrightarrow p = 2m \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$

$\Rightarrow q$ è pari $\Rightarrow p$ e q hanno 2 come fattore comune $\rightsquigarrow$ CONTRADDIZIONE. ∎

Cosa abbiamo usato? $(\sqrt{2})^2 = 2$ e regole elementari dell'algebra.

- N.B. $2 > \sqrt{2} > 1$ $\Leftarrow 2^2 > (\sqrt{2})^2 > 1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $4 > 2 > 1$ ✓

$\rightsquigarrow$ ORDINE TOTALE su $\mathbb{R}$ ..... -1, 0, 1, $\sqrt{2}$, 2 $\longrightarrow \mathbb{R}$

Ma qual è il punto di partenza?

L'analisi su $\mathbb{R}$: una visione d'insieme

1 Numeri

Definizione assiomatica dei numeri reali

*L'***insieme dei numeri reali** $\mathbb{R}$ *è un insieme*[1] *su cui sono definite due operazioni binarie*[2], **somma** *(o* **addizione***)* "$+$" *e* **prodotto** "$\cdot$", *e una* **relazione**[3] *d'ordine totale* "$\leq$" *che soddisfano i seguenti quindici assiomi "algebrici" ed un sedicesimo assioma di "completezza":*

Assiomi di addizione[4]

(S$_1$) $(x+y)+z = x+(y+z), \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$ [proprietà associativa]

(S$_2$) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tale che $x+0=x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ [esistenza elemento neutro]

(S$_3$) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \exists\, y \in \mathbb{R}$, tale che $x+y=0$ [esistenza elemento opposto]

(S$_4$) $x+y=y+x\,, \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ [proprietà commutativa]

Assiomi di prodotto

(P$_1$) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)\,, \ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$ [proprietà associativa]

(P$_2$) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, tale che $x \cdot 1 = x\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ [esistenza elemento neutro]

(P$_3$) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \, x \neq 0, \ \exists\, y \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot y = 1$ [esistenza reciproco]

(P$_4$) $x \cdot y = y \cdot x\,, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ [proprietà commutativa]

Assioma somma–prodotto

(SP) $x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)\,, \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$ [proprietà distributiva]

Assiomi di ordine:

(O$_1$) $x \leq x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ [proprietà riflessiva]

(O$_2$) $x \leq y, \ y \leq x$ allora $x = y$ [proprietà antisimmetrica]

(O$_3$) $x \leq y, \ y \leq z$ allora $x \leq z$ [proprietà transitiva]

(O$_4$) $\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \, x \leq y$ oppure $y \leq x$ [ordine totale]

Assioma somma–ordine

(SO) $x \leq y$ allora $x+z \leq y+z\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$ [invarianza per 'traslazione]'

Assioma prodotto–ordine

(PO) $0 \leq x, \ 0 \leq y$ allora $0 \leq x \cdot y$ [invarianza per prodotto]

Assioma di completezza[5]

(D) Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti[6] di $\mathbb{R}$ tali che $x \leq y$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$. Allora, esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq s \leq y$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$; diremo che un tale numero reale s **separa**[7] gli insiemi A e B.

Proprietà algebriche elementari

Da questi assiomi, usando il linguaggio della logica standard e le idee fondamentali della teoria degli insiemi, si *dimostra* la validità delle proprietà "familiari" dell'algebra elementare, tra le quali[8]:

[1] Un *insieme* A è una 'collezione di oggetti (o elementi)' per cui è sempre possibile stabilire se un elemento x appartiene a A ($x \in A$) oppure x non è un elemento di A ($x \notin A$). A è un *sottoinsieme* di B, in simboli $A \subseteq B$ se ogni elemento di A è anche un elemento di B: $x \in A$ implica $x \in B$.

[2] Una *operazione binaria* su di un insieme A è una legge che ad una coppia (ordinata) di elementi di A associa in modo univoco un elemento di A; l'insieme delle coppie ordinate di A si denota con $A \times A$. In generale, il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B, denotato con $A \times B$, è l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$.

[3] Una *relazione* $\mathcal{R}$ su A è un sottoinsieme del prodotto $A \times A$: $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. Le coppie in $\mathcal{R}$ sono le coppie che stanno nella relazione $\mathcal{R}$; normalmente se $(x,y) \in \mathcal{R}$ si scrive $x\mathcal{R}y$.

[4] Nella formulazione degli assiomi appaiono i *quantificatori logici* '$\forall$', che si legge 'per ogni' e '$\exists$' che si legge 'esiste'.

[5] L'assioma di completezza traduce in linguaggio matematico preciso l'idea geometrica euclidea che la 'retta' (come rappresentazione dei numeri reali) non ha 'buchi'.

[6] L'insieme vuoto $\varnothing$ è, per definizione, l'insieme che non contiene alcun elemento, ossia $x \notin \varnothing$ qualunque sia x. L'introduzione dell'insieme vuoto è necessaria in qualunque teoria degli insiemi.

[7] Si noti che nulla viene detto sull'appartenenza di s a A o a B.

[8] Nelle seguenti affermazioni, x, y, z sono elementi di $\mathbb{R}$. In queste note elenchiamo le proposizioni o affermazioni matematiche con numeri romani in grassetto. Ognuna di tali affermazioni è un 'teorema' ossia una *affermazione matematica la cui validità può essere dedotta dagli assiomi.* Anche 'lemmi' o 'corollari' sono proposizioni (l'uso di uno di questi termini anziché l'altro è alquanto soggettivo e matematicamente irrilevante).

3 Sottrazione,divisione.N.

sabato 19 settembre 2020 17:42

(4) • Tutti gli enunciati della matematica (e della fisica !) seguono dagli ASSIOMI dei numeri reali

Esempi:
- • $-x = (-1) \cdot x$
- • $1 > 0$ NON E' UN ASSIOMA, E' UNA CONSEGUENZA
- $(a > b \overset{def}{\iff} (a \geq b \text{ e } a \neq b))$

1. $x^2 := x \cdot x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$; se $x \geq 0$ segue da (SP)
   se $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \quad (-x) \cdot (-x) = x^2 \geq 0$
2. $1 \cdot 1 = 1 \quad 1 \geq 0, \quad 1 \neq 0$ per assioma $\Rightarrow 1 > 0$

(5) Sottrazione e divisione

SOTTRAZIONE $x - y := x + (-y)$

DIVISIONE PER $y \neq 0$:

$$\frac{x}{y} := \text{"x diviso y"} := x \cdot y^{-1}.$$

(6) NUMERI NATURALI E NUMERI INTERI

in $\mathbb{R}$ ci sono $0, 1$

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2 := 1+1, 3 := 2+1, 4 := 3+1, \dots\}}$$ "E così via"

Formalizzazione! DEF. $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice INDUTTIVO se:
(a) $1 \in I$
(b) $x \in I \Rightarrow x+1 \in I$.

DEF!! $\mathbb{N}$ = il più piccolo insieme induttivo di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I \qquad \boxed{\mathbb{N} \subseteq I, \ \forall I \text{ induttivi.}}$$

4 INDUZIONE

sabato 19 settembre 2020 17:44

NUMERI INTERI

$$\mathbb{Z} := \underbrace{-\mathbb{N}}_{\{-n \,\mid\, n\in\mathbb{N}\}} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Q} := \left\{ \underbrace{\frac{p}{q}}_{p\cdot q^{-1}} \,\middle|\, p\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{N} \right\}.$$

7 . PRINCIPIO DI INDUZIONE

Come dimostrare infinite affermazioni che dipendono da $n\in\mathbb{N}$?

ESEMPIO

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} := 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n^2} \le 2-\frac{1}{n}} \quad (*)_n$$

SCHEMA DIM.
(i) (PASSO BASE): dimostrare che $(*)_1$ (per $n=1$) È VERA
(ii) (PASSO INDUTTIVO): $(*)_n \Rightarrow (*)_{n+1}$ $\;\Rightarrow (*)_n$ È VERA $\forall n\in\mathbb{N}$,

PERCHÉ: $I := \{n\in\mathbb{N} \mid (*)_n \text{ è vera}\} \Rightarrow I$ è induttivo.

$\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq I$ (ma $I \subseteq \mathbb{N}$) $\Rightarrow I = \mathbb{N}$!

ESERCIZIO DIMOSTRARE $(*)_n$, $\forall n$.

(i) $(*)_1$ $\quad 1 \le 2-1 = 1$ ✓

(ii) Assumiamo che $(*)_n$ sia vera.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{(*)_n}{\le} 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\le} 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$ ✓

5 - Estremo superiore

sabato 19 settembre 2020 19:22

ESTREMO SUPERIORE

(cioè: $x \in A, y \in B \Rightarrow x \leq y$)

XVI assioma

(D) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e $A \leq B$

$\Rightarrow \exists\ s \in \mathbb{R} \mid x \leq s \leq y, \ \forall x \in A, \forall y \in B$.

equivalente all'esistenza dell'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE)

TEOREMA Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, limitato superiormente

(cioè: $\exists\ M \in \mathbb{R} \mid x \leq M, \ \forall x \in A$)

un maggiorante di A. Può non appartenere ad A.

TESI: $\exists!$ $\min \underbrace{\{M \mid M \geq x, \forall x \in A\}}$

esiste unico

insieme di tutti i maggioranti di A

DIM. Sia B. Per ipotesi $B \neq \emptyset$ e $\forall x \in A, \forall M \in B$ $x \leq M$.

$\overset{(D)}{\Longrightarrow} \exists\ s \in \mathbb{R} \mid x \leq s \leq M \ \forall x \in A, \forall M \in B$.

$\Rightarrow$ s è il più piccolo dei maggioranti. ∎

(N.B. $\Rightarrow$ è unico: il minimo o il massimo di un insieme, quando $\exists$, sono unici.)

1) AD ESEMPIO: permette di definire rigorosamente le radici quadrate:

$x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ $(x > 0, n \geq 2)$, $R_n := \{t \geq 0 \mid t^n \leq x\}$

$R_n \neq \emptyset$ ed è limitato sup. $\Rightarrow \exists!$ estremo superiore

$\sqrt[n]{x} := \sup R_n$ e SI DIMOSTRA CHE:

$(\sqrt[n]{x})^n = x$. (è l'unico $y \geq 0 \mid y^n = x$).