

1 Limiti

giovedì 24 settembre 2020 10:37

LIMITI

data $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

vogliamo definire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ = "limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è L "

- intuitivamente: $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx L$
- Non è detto che $L = f(x_0)$, infatti potrebbe essere $x_0 \notin D$!
- circa (latina) = intorno, da ambo i lati

DEF: Un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ è un "intervallo aperto" che contiene x_0

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

DEF: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall \text{ intorno } V \text{ di } L \in \mathbb{R}, \exists \text{ un intorno } U \text{ di } x_0 \\ \text{t.c. } f(x) \in V, \forall x \in U \cap D - \{x_0\} \end{cases}$

N.B. x_0 deve essere t.c. $\forall$ intorno U di x_0 $U \cap D - \{x_0\} \neq \emptyset$

(cioè x_0 deve essere un pto di accumulazione di D .)

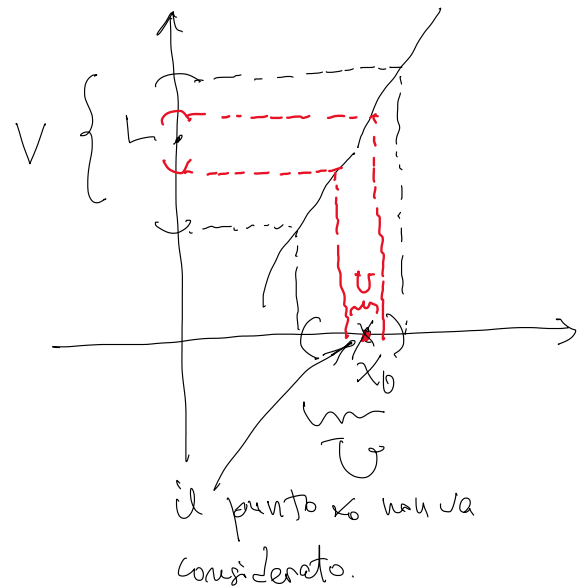
$\rightarrow$ cioè D contiene punti arbitrariamente vicini a x_0 diversi da x_0

Equivalentemente ("definizione con ϵ - δ "): $f(x)$ è ϵ -vicino a L

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta$

distanza di $f(x)$ da L $x \neq x_0$ $x \approx x_0$

$(V = (L - \epsilon, L + \epsilon) = \{y \mid |y - L| < \epsilon\}, U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\})$



N.B. $|x - y| = 0 \iff x = y$

2-esempi

giovedì 24 settembre 2020 10:39

Esempi δ from $\varepsilon > 0$ arbitrary $\Rightarrow$ dobbiamo trovare $\delta > 0$.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, $\delta = \varepsilon$ ($|x| < \delta \Rightarrow x < \varepsilon$)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ ($D = [0, +\infty)$)

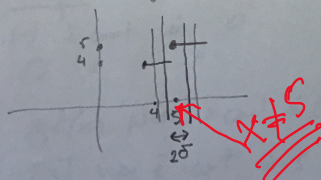
$\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq x < \varepsilon^2 =: \delta$, $\delta = \varepsilon^2$
 $x \geq 0$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}^2(x) = 1$ δ è arbitrario perché
 $\operatorname{sgn}^2(x) = 1, \forall x \neq 0$

(ma n.b. $\operatorname{sgn}^2(0) = 0 \neq L = 1$).

4. $\lim_{x \rightarrow 5} [x]$ non esiste $x_0 = 5$

$\rightarrow$ ci sono punti $x < 5$ t.c. $[x] = 4$ e punti $x > 5$ t.c. $[x] = 5$



5. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. $\delta = \varepsilon$: $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \delta$
 $\forall 0 < |x| < \delta$.

Data $\varepsilon > 0$ voglio
trovare $\delta > 0$ |

Per $|x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |x - 0| =$
 x_0
 $= L$
 $= |x| < \varepsilon$

$\delta = \varepsilon$ OK!

3-Algebra dei limiti. Continuità

giovedì 24 settembre 2020 10:40

ALGEBRA DEI LIMITI: $f \rightarrow L, g \rightarrow M$ per $x \rightarrow x_0$

Allora: $af + bg \rightarrow aL + bM$; $fg \rightarrow LM$

TECNICHE
e $M \neq 0$, $\frac{f}{g} \rightarrow \frac{L}{M}$; e $f \leq g \Rightarrow L \leq M$
teorema di confronto

$\lim_{y \rightarrow M} f(y) = L$

se M è un pto di accumulazione per $\text{dom}(f)$ e
 g è iniettiva vicino ad $M \Rightarrow f \circ g \rightarrow L$
"cambio di variabile".

CONTINUITÀ

$f: D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$

DEF f è cont. in x_0 a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (x_0 pto di acc. per D)

equiv.: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon, \forall |x - x_0| < \delta, x \in D$

Esempi

1. $|x|$ è cont. in 0

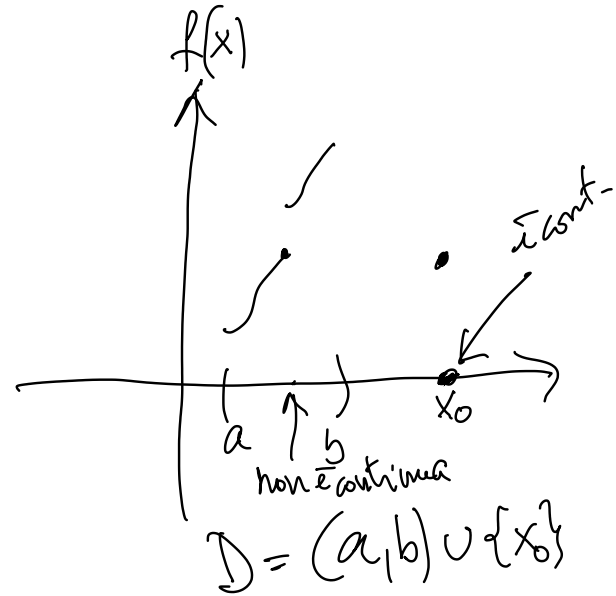
2. $\sqrt{x}$ " " "

3. $\text{sgn}^2(x)$ non è cont. in 0 (in $\text{sgn}^2(x) = 1, \text{sgn}^2(0) = 0$)

4. $[x]$ non è cont. in 5

5. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$? 0 non è nel dominio

ma se intendiamo $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ è cont. in } 0$



4-Teoremi fondamentali sulla continuità

giovedì 24 settembre 2020 10:41

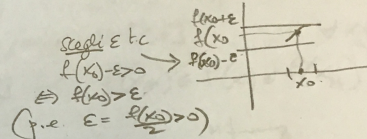
TEOREMI FONDAMENTALI SULLA CONTINUITÀ

Teorema 1 (permanenza del segno)

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D$ e $f(x_0) \neq 0$. Allora

Allora, $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \cdot f(x_0) > 0$

$\forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \quad f(x) \text{ e } f(x_0) \text{ hanno lo stesso segno}$



Teorema 2 (esistenza degli zeri)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont. su $[a, b]$ (in ogni pt. di $[a, b]$) e $f(a) \cdot f(b) < 0$.
 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ segni opposti agli estremi

Allora $\exists x_0 \in (a, b) \mid f(x_0) = 0$.

Dm. supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$.

Definiamo $I \subseteq [a, b]$, $I := \{x \geq a \mid f(t) < 0, \forall a \leq t \leq x\}$

$\Rightarrow x_0 = \sup I$. (si usa Teorema 1).

Teorema 3 (valori intermedi)

f continuo su I intervallo $\Rightarrow f(I)$ è un intervallo.
(ossia $\forall x_1, x_2$ in I , f assume tutti i valori tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$)

Es. $f(x) = x^2$ $I = [0, 1]$ $f(I)$ è un intervallo

$\Rightarrow f$ assume tutti i valori tra $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$

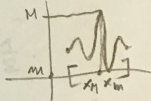
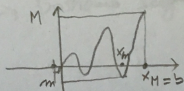
$\Rightarrow f([0, +\infty)) = [0, +\infty) \leftarrow$ dominio di $\sqrt{x}$.

5-Teoremi fondamentali... (cont)

giovedì 24 settembre 2020 10:42

Teorema 4* I intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona
(crescente: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)
o decrescente $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)
Allora, la funzione inversa è continua
 $f^{-1}: \text{im}(f) \rightarrow I$ è cont.

Teorema 5 (Weierstrass) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua.
Allora, f assume max/min su $[a, b]$ $\forall x \in [a, b]$
(ossia $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ t.c. $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$)



(si generalizza ad insiemi compatti)

Teorema 6 (Heine-Cantor) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cont.
Allora f è uniformemente continua
(ossia δ dipende solo da ε e non da x_0).

6-Limiti infiniti

giovedì 24 settembre 2020 10:44

LIMITI INFINITI

$X_0 = L$ "infiniti"

1. $X_0 = +\infty$. Successione $x_n = \frac{1}{n}$, $n \rightarrow +\infty$

$x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ o $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

idea: intorno di $+\infty$ sono le semirette $(N, +\infty) = \{x > N\}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ (esiste un intorno $(N, +\infty)$ di $+\infty$) t.c.

$|x_n| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ossia $\forall n > N$.

$$\frac{1}{n}$$

$n > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow$ possiamo scegliere $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

2. $L = +\infty$

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ con $D = (0, +\infty)$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

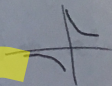
$\forall$ intorno intorno V di $+\infty$, cioè $\forall N$ ($V = (N, +\infty)$)

$\exists \delta$ $f(x) \in V$ cioè $f(x) > N \quad \forall x \in D \quad |x| < \delta$

$$\frac{1}{x} > N \Rightarrow x < \frac{1}{N} \quad \delta = \frac{1}{N}$$

attenzione! $D = (0, +\infty)$

Se $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ NON ESISTE

7-Limiti notevoli

giovedì 24 settembre 2020 10:45

LIMITI NOTEVOLI

1. $a > 1, p \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$
2. $p \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{n^p} \rightarrow 1$
3. $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459045 \dots$
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x} = x$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
11. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$ (Stirling).

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$ $a > 1$ (serve per 1)

Lemma (Bernoulli) $a > 1, b = a - 1 > 0 \Rightarrow a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb$.

Dim (induzione) $n=1$ ok. (con =).
Assumiamo $(1+b)^n \geq 1 + nb$. Calcoliamo $(1+b)^{n+1} = (1+b)^n \cdot (1+b) \geq \frac{(1+nb)(1+b)}{1+(n+1)b + nb^2} \geq 1 + (n+1)b$. ✓

Ora $\frac{a^n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1+nb}{\sqrt{n}} > \frac{nb}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}b \rightarrow +\infty$.

SERIE

Le serie sono particolari successioni:

Dati $\{a_k\}$ i termini della serie

$\downarrow$

$\{S_n\} \leftarrow$ serie

$S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Esempio

Serie geometrica fissiamo $x \in \mathbb{R}$ (ragione della serie)

$a_k := x^k$ $S_n := \sum_{k=1}^n x^k$ ~~$x + x^2 + x^3 + \dots$~~

(per $x = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$)

N.B. $x \cdot S_n = x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1}$

$S_n - x \cdot S_n = x - x^{n+1} \Rightarrow S_n(1-x) = x(1-x^{n+1})$

$\Rightarrow S_n = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x} = \frac{x}{1-x} (1-x^{n+1})$

per $|x| < 1 \Rightarrow x^{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow S_n \rightarrow \frac{x}{1-x}$

($x = \frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$)

$x = \frac{1}{2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

x^n o $|x| < 1$

$x \neq 0, a := \frac{1}{|x|} > 1$

$a^n \rightarrow +\infty$

(Segue da Bernoulli:

$a^n = (1+b)^n \geq 1+nb$

$\uparrow$ $b > 0 \rightarrow +\infty$)

$$0.\overline{9} = 0,99999\dots$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

$$= 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right)$$

$$= 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$