1-Derivate

sabato 26 settembre 2020 18:40

Data una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (intervallo) definiamo il RAPPORTO INCREMENTALE di f nei punti $x \neq x_0 \in I$:

$$R_f(x, x_0) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

⟶ esprime la variazione di f rispetto ad un incremento $y = x - x_0$

$$R_f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{con: } \Delta x := x - x_0 \quad \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

N.B. $R_f(x, x_0) = R_f(x_0, x)$.

DEF. Se $\exists \lim_{x \to x_0} R_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$

DERIVATA DI f IN x_0.

N.B. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\lim_{y \to 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y}}$

$x = x_0 + y$
$x \to 0 \iff y \to 0$ } CAMBIO DI VARIABILE

Altre notazioni: $f'(x_0) = Df(x_0) = Df|_{x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

NOTAZIONE DI LEIBNITZ.

https://it.wikipedia.org/wiki/Notazione_di_Leibniz

ESEMPI tutti i limiti notevoli finiti:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ (x_0)

2. $(\log x)'(1) = 1 = \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y) - \log 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y}$ ($\log 1 = 0$)

cambio variabile $x = 1 + y$
$x \to 1 \iff y \to 0$

3. $(e^x)'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, da cui:

4. $(e^x)'(x_0) = \lim_{y \to 0} \frac{e^{x_0 + y} - e^{x_0}}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{x_0} e^y - e^{x_0}}{y} = \lim_{y \to 0} e^{x_0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} \overset{(4)}{=} e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$.

$x = x_0 + y$

Una maniera equivalente di dire che f è derivabile in x_0 è la seguente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Longleftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x,x_0)$$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$

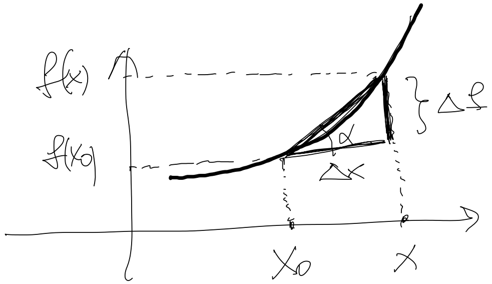
con $\dfrac{r(x,x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ ossia $\lim_{x \to x_0} \dfrac{r(x,x_0)}{x-x_0} = 0$.

Infatti

$$\frac{r(x,x_0)}{x-x_0} \to 0 \Longleftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to 0 \Longleftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$$

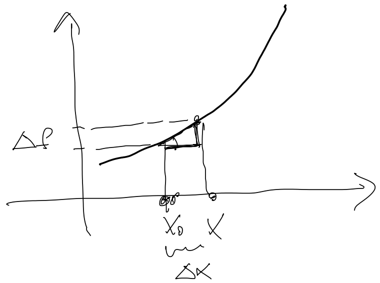
LE DUE INTERPRETAZIONI FONDAMENTALI DELLA DERIVATA

① (GEOMETRICA)



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

coefficiente angolare della retta secante passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$



quando $x \to x_0$ il coefficiente angolare $\alpha(x,x_0) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \longrightarrow f'(x_0)$

!!

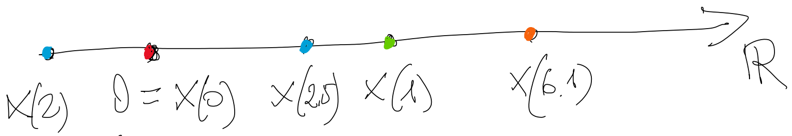
COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE A G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$

https://it.wikipedia.org/wiki/Derivata

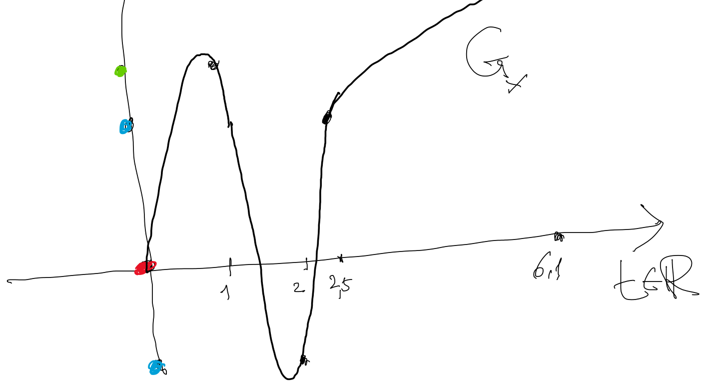
② (CINEMATICA)

Sia $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ la funzione che dà la posizione $x \in \mathbb{R}$ di un punto vincolato a muoversi su una retta $\mathbb{R}$:

$x(t)$ $\mathbb{R}$



$\{x(t)\}$



$t \longrightarrow x(t)$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} := \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} =$$ VELOCITÀ MEDIA TRA GLI ISTANTI t_0 e t

$$t \to 0 \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \dot{x}(t_0) := x'(t_0) =$$ VELOCITÀ ISTANTANEA ALL'ISTANTE t

2-Regole di derivazione

sabato 26 settembre 2020 19:56

N.B. Se $\exists\, f'(x_0) \Rightarrow f$ è CONTINUA IN x:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

algebra dei limiti

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(R_1) La derivazione è un'operazione lineare sulle funzioni:

f, g derivabili in x_0, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (af+bg)'(x_0) = a f'(x_0) + b g'(x_0)$

(R_2) (regola di Leibnitz) f, g deriv. in x_0:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

(R_3) $g'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Attenzione ai simboli!
$g' =$ derivata di g
$g^2 = g\cdot g$, e $g^1 = g$

(R_4) Da (R_2) e (R_3) segue $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(R_5) $(f\circ g)' = f'\circ g \cdot g'$

più precisamente: se f è derivabile in y_0 e g è derivabile in x_0 e $g(x_0)=y_0$ allora

$\Rightarrow f\circ g(x)$ è derivabile in x_0 e $(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0)$

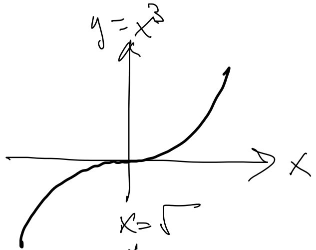
(R6) f invertibile (cioè iniettiva) e derivabile in x_0 con $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$ $f' \circ g(x_0)$

allora la funzione inversa $g(y) := f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

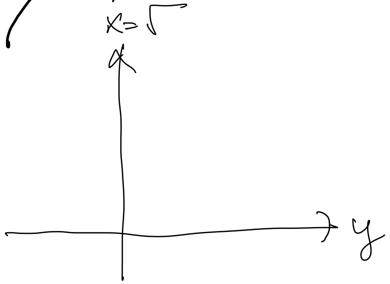
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ossia} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ g(y_0)}$$

Attenzione ai simboli: qui f^{-1} è la funzione inversa di f non il reciproco di f

N.B. l'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$ non può essere rimossa:



$x \to x^3$ è iniettiva su $\mathbb{R} \Rightarrow$ la sua inversa è $y \to \sqrt[3]{y}$



3-Derivata e crescita. Punti critici

sabato 26 settembre 2020 20:34

N.B. $R_f(x,x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \ \forall x \neq x_0 \iff$ f è crescente (cioè $x \geq x_0 \implies f(x) \geq f(x_0)$)

— — — — — — — ≤ 0 . - - - - f è decrescente - - - - - $f(x) \leq f(x_0)$

Teorema 1 Sia f derivabile su I intervallo. Allora

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \iff$ f è crescente su I.

Teorema 2 $f' > 0$ su I $\implies$ f è strettamente crescente

Attenzione: non vale il viceversa: x^3 è strett. crescente ma $(x^3)'(0) = (3x^2)|_{x=0} = 0$.

DEF. $x_0 : f'(x_0) = 0$ si chiama PUNTO CRITICO PER f

Teorema 3 (Fermat) $f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$, derivabile in x_0 e x_0 punto di max (o min) cioè $f(x_0) \geq f(x), \forall x$.

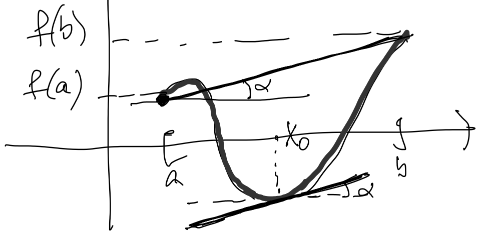
Allora $f'(x_0) = 0$.

(Dim: se fosse $f'(x_0) > 0$ sarebbe strett. crescente e quindi x_0 non è un punto di max o min
... $f'(x_0) < 0$ - - - - de- - -)

Teorema 4 (Teorema del valor medio di Lagrange)

f cont. su $[a,b]$, derivabile in (a,b).

Allora, $\exists \ x_0 \in (a,b) \mid f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.



<u>Nota</u>: il teorema di Lagrange $\Rightarrow$ teorema 2

$x > y$ in I. Vogliamo dire che $f(x) > f(y)$:

Se f è derivabile

4-Derivate successive

sabato 26 settembre 2020 20:58

Se f è derivabile su I intervallo $\Rightarrow$ $x \in I \to f'(x)$ è una nuova funzione su I

Possiamo quindi studiare se $\exists$ la derivata di f' : $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ se tale limite esiste poniamo $f''(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ e la chiamiamo LA DERIVATA SECONDA DI f in x_0.

Es. $(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

$(e^x)'' = ((e^x)')' = (e^x)' = e^x$

$(\log x)'' = ((\log x)')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

etc.

NON TUTTE LE FUNZIONI SONO DERIVABILI O DERIVABILI DUE VOLTE

$x \to |x|$ è continua su $\mathbb{R}$, derivabile $\forall x \neq 0$, ma NON derivabile in $x=0$.

- $R_{|x|}(x,0) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x$ che non ha limite per $x \to 0$
- $f(x) := x|x|$ è derivabile in $\mathbb{R}$ ma $f'(x)$ NON è derivabile in 0:

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2)' = 2x, & \text{se } x > 0 \\ (-x^2)' = -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2, & x>0 \\ \lim_{x\to 0} -\frac{2x}{x} = -2, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(0) \nexists$.

DERIVATA SECONDA E PUNTI CRITICI

x_0 pto critico per f $\left(f'(x_0)=0 \right)$, f derivabile 2 volte in x_0.

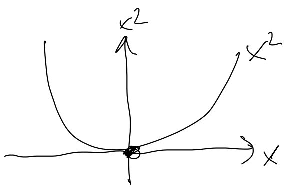
Allora,

(i) $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ è min. stretto (cioè vicino a x_0 $f(x) > f(x_0)$ $\Leftrightarrow \exists\, \delta>0 \mid f(x) > f(x_0),\ \forall\, 0<|x-x_0|<\delta$)

(ii) x_0 è un minimo locale interno $\Longrightarrow f''(x_0) \geq 0$.

(Analog. per max locale -- $f''(x_0) \leq 0$)

<u>esempio</u> $f = x^2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f''(0)=2 \Rightarrow 0$ è min. stretto

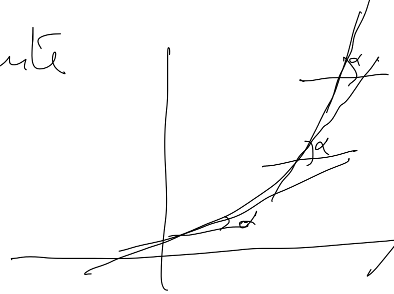


CONVESSITA'

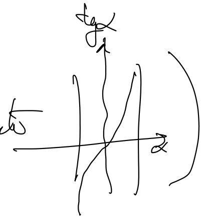
f derivabile 2 volte su I;

$f''(x) > 0 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f$ <u>strettamente convessa</u>. $f''(x) \geq 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f$ è convessa

$x \to f'(x)$ è strett. crescente



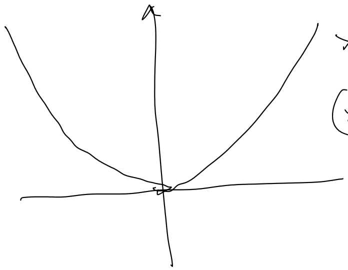
$\operatorname{tg}\alpha = f'$



$\operatorname{tg}\alpha$

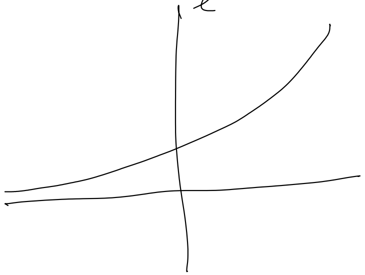
($\alpha \to \operatorname{tg}\alpha$ è strett. crescente)

Funzione convesse:



x^2

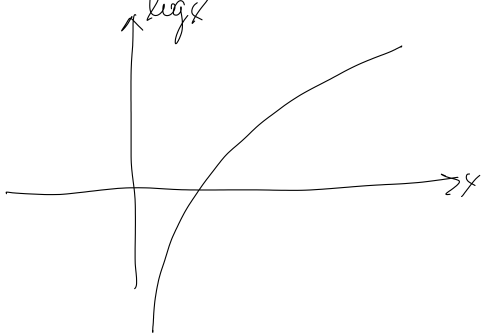
$(x^2)'' = 2$



e^x

$(e^x)'' = e^x > 0$

Se $f'' \leq 0 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f$ concava



$\log x$

$$(\log x)'' = ((\log x)')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad (x > 0).$$

$\sqrt{x}$

$$(\sqrt{x})'' = \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\right)' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^{3/2}} < 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

FORMULA DI TAYLOR

f derivabile in x_0: $f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h}_{\text{polinomio 1° grado in } h} + o(h)$

$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

generalizzazione:

f derivabile n volte in x_0:

derivata 3ª

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n}_{\text{polinomio di grado } n \text{ in } h} + o(h^n)$$

$\lim_{h\to 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$.

ES.

1. $e^x = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \dots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)$

$\boxed{x_0 = 0, \ h = x}$ $(e^x)^{(n)} = e^x, \ \forall n$ $(e^x)^{(n)}(0) = 1, \ \forall n.$

2. $\cos x$

$-\sin x$ $n=1$

$-\cos x$ $n=2$

Derivate:

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\cos x & n=2 \\ \sin x & n=3 \\ \cos x & n=4 \\ -\sin x & n=5 \\ -\cos x & n=6 \\ \sin x & n=7 \\ \cos x & n=8 \end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n=1 \\ -1 & n=2 \\ 0 & n=3 \\ 1 & n=4 \\ 0 & n=5 \\ -1 & n=6 \\ 0 & n=7 \\ 1 & n=8 \end{cases}$$

$$\cos x = \underset{\cos 0}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$