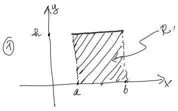
1-Integrali: idee fondamentali

domenica 27 settembre 2020 17:24

Idea fondamentale: consideriamo un rettangolo in $\mathbb{R}^2$:

①

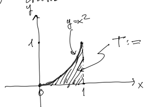


$R := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h\}$

DEF: $\text{Area}(R) := (b-a) \cdot h$

$(b-a)$: lunghezza della base; h: lunghezza dell'altezza

② Consideriamo un "triangolo curvilineo"

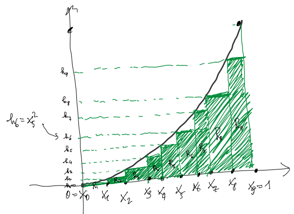


$T := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

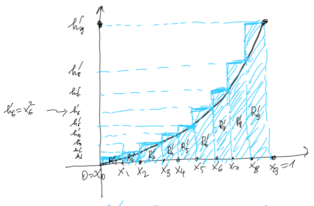
Cosa è l'area di T e come calcolarla?

IDEA $\longrightarrow$ Approssimare T con tanti rettangolini:

$$\sum_{i=1}^{9} \text{area}(R_i) \lesssim \text{Area}\,T \lesssim \sum_{i=1}^{9} \text{area}(R_i')$$



$R_i = [x_{i-1}, x_i) \times [0, h_i]$, $1 \leq i \leq 9$

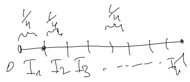


$R_i' := [x_{i-1}, x_i) \times [0, h_i']$, $1 \leq i \leq 9$

N.B.: $\underbrace{\bigcup_{k=1}^{9} R_k \subseteq T \subseteq \bigcup_{k=1}^{9} R_k'}$

Consideriamo suddivisioni sempre più fitte con n rettangolini di uguale base e mandiamo $n \to \infty$.

Dato $n \in \mathbb{N}$, sia $I_k := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $1 \leq k \leq n$



e poniamo $R_k := I_k \times \left[0, \left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right]$, $R_k' := I_k \times \left[0, \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \text{area}(R_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leq \text{"area}\,T\text{"} \leq \sum_{k=1}^{n} \text{area}(R_k') = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \overset{\text{ES}}{=} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3} \quad \text{(alg. limiti)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ES (induzione)} \\ \text{Dimostrare che} \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{array}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{"area}\,T\text{"} = \frac{1}{3}$$

- Sia E un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e $f: E \to \mathbb{R}$ limitata (cioè $-\infty < \inf_E f \le \sup_E f < +\infty$)
  $\inf\{f(x) \mid x \in E\}$ $\sup\{f(x) \mid x \in E\}$
- Consideriamo una PARTIZIONE di E $:= P := \{I_k \mid 1 \le k \le n\}$
  dove: I_k intervalli a due a due disgiunti tali che $\bigcup_{k=1}^n I_k = E$
- Definiamo le SOMME INFERIORI E SUPERIORI DI RIEMANN di f su E rispetto alla partizione P:

$$\underline{S}_E(f;P) := \sum_{k=1}^n \left(\inf_{I_k} f\right) |I_k|$$

$|I_k| :=$ misura di $I_k := \sup I_k - \inf I_k$

$$\overline{S}_E(f;P) := \sum_{k=1}^n \left(\sup_{I_k} f\right) |I_k|$$

Os. $\forall\, P, P'$ $\quad \underline{S}_E(f,P) \le \overline{S}_E(f,P')$ (ovvio se $P = P'$)

- Definiamo l'INTEGRALE INFERIORE E SUPERIORE DI RIEMANN

$$\mathcal{J}_E^-(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \underline{S}_E(f;P) \le \mathcal{J}_E^+(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}} \overline{S}_E(f;P)$$

$\mathcal{P}$: l'insieme di tutte le partizioni di E

Se $\mathcal{J}_E^-(f) = \mathcal{J}_E^+(f)$ DIREMO CHE f è integrabile secondo Riemann su E e chiamiamo $\mathcal{J}_E(f) := \mathcal{J}_E^-(f) = \mathcal{J}_E^+(f)$ l'integrale (di Riemann) di f su E.

NOTAZIONI PIÙ COMUNI: $\mathcal{J}_E(f) = \int_E f = \int_E f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$a = \inf E$, $b = \sup E$

$$\boxed{\mathcal{R}(E) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid \mathcal{J}_E^-(f) = \mathcal{J}_E^+(f)\}}$$

SEMPLICI ESEMPI:

1) Fissiamo $E = [a,b]$. $f := \chi_{(c,d)}(x)$. $a \le c < d \le b$

$$\int_E f = \int_c^d f = \int_c^d 1 = (d-c).$$

2) $E = [0,1]$, $f = x^2$ (esempio iniziale) $\mathcal{J}_E^-(f) = \mathcal{J}_E^+(f) = \frac{1}{3}$.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI

$f, g \in \mathcal{R}(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(P1) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(E)$ e $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$

L'integrale (come la derivata) è un'operazione LINEARE

(P2) $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f \cdot g \in \mathcal{R}(E)$.

(P3) $f \le g \implies \int_E f \le \int_E g$

L'integrale è una operazione MONOTÒNA

(P4) $\left|\int_E f\right| \le \int_E |f|$.

Vediamo come (P1),(P2),(P3) $\Rightarrow$ (P4):

$$\underset{\substack{(P_1)(P_2) \\ \in \mathcal{R}(E)}}{-|f|} \le f \le \underset{\substack{(P_2) \\ \mathcal{R}(E)}}{|f|} \overset{(P_3)}{\implies} \underbrace{\int_E (-|f|)}_{= -\int_E |f| \ (P_1)} \le \int_E f \le \int_E |f|$$

$$\overset{(!)}{\iff} \left|\int_E f\right| \le \int_E |f|$$

ESERCIZIO $a \ge 0$, $K \in \mathbb{R}$

N.B. $-a \le K \le a \iff |K| \le a$

$a \ge .$

OSS. La (P4) è una proprietà di continuità:

se $f,g\in\mathcal{R}(E)$ e $\sup_E|f-g|\le\varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\int_E f-\int_E g\right| \overset{(P_1)}{=} \left|\int_E f-g\right| \overset{(P_4)}{\le} \int_E|f-g| \overset{(P_3)}{\le} \int_E \varepsilon \overset{(P_1)}{=} \varepsilon\int_E 1=\varepsilon(b-a).$$

DUE CLASSI IMPORTANTI DI FUNZIONI INTEGRABILI

TEOREMA Sia E un intervallo limitato e $f: E\to\mathbb{R}$ limitata. Se f è continua o se f è monotona su $E \Rightarrow f\in\mathcal{R}(E)$.

Dim: caso $E=[a,b]$, f continua. Dobbiamo far vedere che $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ una partizione P di E t.c. $\overline{S}_E(f,P)-\underline{S}_E(f,P)\le\varepsilon$.

Sia $a=\inf E$, $b=\sup E$ e $\varepsilon>0$. Per il teorema di Heine-Cantor $\exists\,\delta \mid |f(x)-f(y)|\le\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall\, x,y\in E$, $|x-y|\le\delta$.

Sia $P=\{I_k\}$ una qualunque partizione di E t.c. $|I_k|\le\delta$. lunghezza di I_k

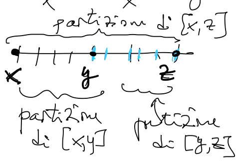
Allora $\overline{S}_E(f,P)-\underline{S}_E(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(\sup_E f)|I_k|-\sum_{k=1}^{n}(\inf_E f)|I_k|$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_E f-\inf_E f\right)|I_k|=\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x,y}|f(x)-f(y)|\right)|I_k|$$

$$\le\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.\quad \text{C.V.D.}$$

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE

$x<y<z$, $x,y,z\in E$, $f\in\mathcal{R}(E)\Rightarrow \int_x^z f=\int_x^y f+\int_y^z f$ (*)



DEF. $x<y$, $\int_y^x f := -\int_x^y f$.

Allora $\forall\, x,y,z\in E$ vale (*) (NON SOLO SE SONO ORDINATI!)

Ad esempio
$$\int_1^2 f=\int_1^3 f+\int_3^2 f$$

Infatti:
$$\int_1^2 f=\int_1^2 f+\int_2^3 f-\int_2^3 f \underset{\text{additività}}{=} \int_1^3 f-\int_2^3 f=:\int_1^3 f+\int_3^2 f.$$

3-Teorema Fondamentale del Calcolo

martedì 29 settembre 2020 16:28

https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_fondamentale_del_calcolo_integrale

int. limitato

TEOREMA Sia $f : E \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(E)$ e f cont. in $x_0 \in E$.
Sia $\bar{x} \in E$ e sia F la "funzione integrale con punto base $\bar{x}$" cioè

$$\longrightarrow F(x) := F(x;\bar{x}) := \int_{\bar{x}}^{x} f(y)\,dy .$$

Allora, F è DERIVABILE in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dim $R_F(x_0+h, x_0) = \frac{1}{h}\left(\int_{\bar{x}}^{x_0+h} f - \int_{\bar{x}}^{x_0} f\right) \underset{\text{additività}}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f$

$\int_{x_0}^{\bar{x}} f$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt + f(x_0)$$

e $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$ se $|h|$ è suff. piccolo $\Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\right| \leq \varepsilon . \quad \text{C.V.D.}$$

COROLLARIO E interv. $F \in C^1(E) \Rightarrow \forall\, a, b \in E$

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Dim Sia $G(x) := -F(x) + F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$

integr. $F' \in C(E)$

T.F.C.

$$\Longrightarrow \quad G'(x) = -F'(x) + F'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad G \equiv \text{cost} = G(a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F(x) - F(a) = \int_a^x F' , \quad \forall\, x \in E . \quad \text{CVD}$$

ESEMPI DI CALCOLO INTEGRALE

1) $\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ $\quad \left([f]_a^b = f(b) - f(a)\right)$

2) $\int^2 \log x = \int^2 (x\log x - x)' = 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 - 1$

3) Sia $M>2$, $\int_2^M \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_2^M \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\int_2^M \left(\log|x-1| - \log|x+1|\right)' = \frac{1}{2}\int_2^M \left(\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)'$

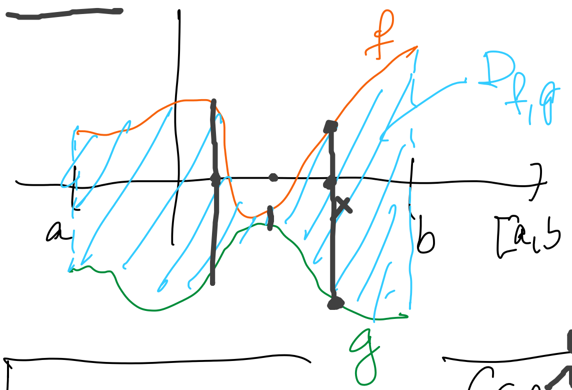
$= \frac{1}{2}\log\frac{M+1}{M-1} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\underbrace{\log\frac{M+1}{M-1}}_{\downarrow M\to+\infty \atop 0}$

$\Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log 3$

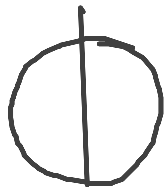
SULLE AREE:

DEF. $f, g \in \mathcal{R}(E)$ con $g \le f$, definiamo

$\underline{D_{f,g}} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in E,\ \underline{g(x)\le y\le f(x)}\}$



$[a,b]=E$



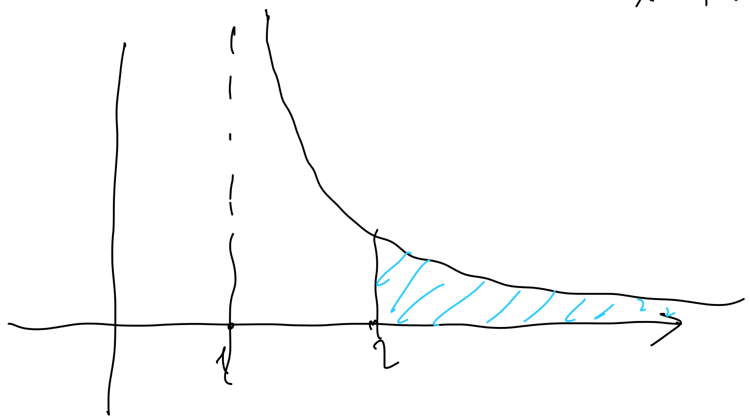
$$\boxed{\text{Area } D_{f,g} := \int_E \overbrace{(f-g)}^{\geq 0}}$$

Quindi $\text{area}(T) := \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$

$T = \{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$.

$\text{Area}(S) = \frac{1}{2}\log 3$

$$S := \left\{ (x,y) \mid x \geq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2-1} \right\}$$



4-Tecniche di integrazione

martedì 29 settembre 2020 19:25

1) <u>Integrazione per parti</u>

$$\int_a^b f' g = [fg]_a^b - \int_a^b f g'$$

(<u>dim</u>: $\int_a^b (f' g + f g') = \int_a^b (fg)' = [fg]_a^b$)

2) <u>Cambio di variabile</u>

$f \in C(E, \mathbb{R})$, $g \in C^1(I, E)$, E, I intervalli

$a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ $\alpha, \beta \in I$. Allora:

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f \circ g(x)\, g'(x)\,dx$$

(<u>dim</u>. $F(y) := \int_{y_0}^y f(x)\,dx \Rightarrow F'(y) = f(y)$

$$\int_\alpha^\beta f \circ g(x)\, g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta F' \circ g(x)\, g'(x)\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (F \circ g)'(x)\,dx = F \circ \underbrace{g(\beta)}_{b} - F \circ \underbrace{g(\alpha)}_{a}$$

$$= F(b) - F(a) = \int_{y_0}^b f(x)\,dx - \int_{y_0}^a f(x)\,dx$$

$$\underset{\text{additività}}{=} \int_a^b f(x)\,dx. \quad \text{CVD} \;)\,.$$

Esempio

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$\underset{g = y = \cos x}{=} - \int \frac{dy}{y} = - \log|y| \underset{y = \cos x}{=} - \log|\cos x|$$