APPELLO A - Parte 2 – *AM110 – CL Matematica (AA 2020/21 – L. Chierchia). 21/1/2021*

Es 1 [Pt. 8] Discutere la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$.

Soluzione Definitivamente $\log n < \sqrt{n}$ quindi $\exists N$ tale che $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$. Quindi la serie converge. (Alternativamente si può usare il criterio di condensazione di Cauchy, discutendo la monotonia di $(\log n)/n^2$).

Es 2 [Pt. 8] Discutere il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\log n}}{e^{\sqrt{n}\log n}}$.

Soluzione $\displaystyle\frac{n^{\log n}}{e^{\sqrt{n}\log n}} = \frac{1}{n^{\sqrt{n}(1-\frac{\log n}{\sqrt{n}})}}$. Poiché $\frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\log n}}{e^{\sqrt{n}\log n}} = 0$, per l'algebra dei limiti estesa (e perché $e^y \to +\infty$ per $y \to +\infty$).

Es 3 [Pt. 12] Sia $f(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Discutere la continuità in 0 di f.

Soluzione $|x|^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}\log\frac{1}{|x|}}$. Facendo il cambio di variabili $y = 1/x$, si ha che $\displaystyle\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y\log y} = 0$. Facendo il cambio di variabili $y = -1/x$, si ha che $\displaystyle\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{y\log y} = +\infty$. Quindi f ha una discontinuità essenziale in $x = 0$.

Es 4 [Pt. 16] Discutere, la variare di $x > -1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^n)}{n^2}$.

Soluzione Per $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\log(1+x^n)|}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2}$, che converge per il criterio della radice. Quindi, per $|x| < 1$, la serie converge assolutamente per confronto asintotico. Per $x = 1$, la serie converge essendo proporzionale a $\zeta(2)$. Per $x > 1$, la serie è a termini positivi e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^n)}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log x^n}{n^2} = \log x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Es 5 [Pt. 16] Discutere il massimo e minimo limite della successione $a_n := e^{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{3})} + \dfrac{1}{n}\cos\left(n\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Soluzione $\lim \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{8}\right) = 0$, e quindi il massimo e minimo limite di $\{a_n\}$ coincidono con il massimo e minimo limite della successione $\{b_n\} := \{e^{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{3})}\}$. I valori della successione $\{b_n\}$ sono dati da $\{e^{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{3})} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \left\{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 1, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$. Quindi, $e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \le b_n \le e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, per ogni n. Prendendo le sottosuccessioni, $n_k := 1 + 6k$ e $m_k := 5 + 6k$ si vede che $b_{n_k} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim b_{n_k}$ e $b_{m_k} = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim b_{m_k}$. Quindi $\limsup a_n = \limsup b_n = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ e $\liminf a_n = \liminf b_n = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.