Es 1 Discutere, al variare di $x > 0$, il limite $\lim_{n\to+\infty} x^n(1-\tanh n)$.

Soluzione $x^n(1-\tanh n) = x^n\Big(1 - \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\Big) = 2\left(\dfrac{x}{e^2}\right)^n \dfrac{1}{1+e^{-2n}} \sim 2\left(\dfrac{x}{e^2}\right)^n$. Dunque, il limite è uguale a 0 se $0 < x < e^2$, è uguale a 2 se $x = e^2$ ed è uguale a $+\infty$ se $x > e^2$.

Es 2 Discutere il $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)^{10}$.

Soluzione Facendo il cambio di variabile $y = x - \frac{\pi}{2}$, si ottiene $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)^{10} = \lim_{y\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{1-\cos y}\right)^{10} = +\infty$, essendo, vicino a 0, $\left|\dfrac{\operatorname{sen} y}{1-\cos y}\right| \sim \dfrac{2}{|y|}$.

Es 3 Discutere, al variare di $x > -1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n^x} \cdot \log(1+x^n)$.

Soluzione Se $|x| < 1$, $n\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^x}\right| |\log(1+x^n)| \le n\log(1+|x|^n) \sim n\,|x|^n$, e poiché la serie $\sum n|x|^n$ converge per $|x| < 1$ (per il criterio della radice), segue che la serie data converge assolutamente per $|x| < 1$ (per confronto asintotico e, poi, per confronto).
Per $x = 1$, $0 < n \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{n^x} \cdot \log(1+x^n) = (\log 2)\, n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} \sim \log 2$, quindi la serie diverge.
Per $x > 1$, $0 < n \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{n^x} \cdot \log(1+x^n) \sim \dfrac{\log x}{n^{x-2}}$. Quindi, per confronto asintotico con la serie di Riemann, la serie diverge per $1 < x \le 3$ e converge per $x > 3$.

Es 4 Sia $a_n := \{\frac{n}{2}\} + \{\frac{n}{3}\}$, dove $\{\cdot\}$ denota 'parte frazionaria'. Discutere il minimo e massimo limite della successione $\{a_n\}$.

Soluzione I valori di $\{n/2\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ sono 0 e 1/2; valori di $\{n/3\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ sono 0, 1/3 e 2/3. Dunque $a_n \in D := \{0, 1/2, 1/3, 2/3, 5/6, 7/6\}$ e quindi $\mathcal{L}_{\{a_n\}} \subseteq D$.
Il minimo limite si ottiene facilmente con la sottosuccessione a_{n_k} con $n_k = 6k$, essendo $a_{n_k} = 0$ per ogni k.
Il massimo limite è 7/6 che si ottiene con la sottusuccessione a_{m_k} con $m_k = 6k+5$, essendo

$$a_{m_k} = \{\frac{m_k}{2}\} + \{\frac{m_k}{3}\} = \{3k+2+\frac{1}{2}\} + \{2k+1+\frac{2}{3}\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\,.$$