Es 1 [Pt. 15] Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n^x}}{n!}$.

Soluzione Se $x > 1$ il limite è $+\infty$: infatti,

$$\frac{2^{n^x}}{n!} \geq \frac{2^{n^x}}{n^n} = \exp\big(n^x \log 2 - n\log n\big) \to +\infty\,.$$

Se $x \leq 1$ il limite è 0: infatti,

$$0 < \frac{2^{n^x}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \left(\frac{2e}{n}\right)^n \to 0\,.$$

Es 2 [Pt. 15] Discutere il $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos x)}{\operatorname{senh}(-x^2) + x^2 \operatorname{sen}\sqrt{x}}$.

Soluzione Il valore del limite è $1/2$. Infatti, per $x \to 0$, si ha

$$\frac{\log(\cos x)}{\operatorname{senh}(-x^2) + x^2 \operatorname{sen}\sqrt{x}} = \frac{\log\big(1 + (\cos x - 1)\big)}{x^2} \cdot \frac{1}{-\frac{\operatorname{senh} x^2}{x^2} + \operatorname{sen}\sqrt{x}} \sim \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{-\frac{\operatorname{senh} x^2}{x^2} + \operatorname{sen}\sqrt{x}} \to \frac{1}{2}\,.$$

Es 3 [Pt. 15] Discutere, al variare di $x > -1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)}{n\big(\log n\big)^x}$.

Soluzione Per $x > 1$, la serie converge assolutamente; infatti, per il criterio di condensazione di Cauchy,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\big|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)\big|}{n\big(\log n\big)^x} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\big(\log n\big)^x} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\big(\log 2^n\big)^x} = \frac{1}{(\log 2)^x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \zeta(2) < +\infty\,.$$

Per $x = 1$, la serie coincide con $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{n\log n}$ che diverge (sempre per il criterio di Cauchy).

Per $-1 < x < 1$ la serie converge assolutamente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\big|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)\big|}{n\big(\log n\big)^x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}|x|^n\right)}{n\big(\log n\big)^x} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^n}{n\big(\log n\big)^x}\,,$$

che converge per il criterio della radice.

Es 4 [Pt. 15] Per $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n \coloneqq (-1)^{[\frac{n}{2}]} + (-1)^{[\frac{n}{3}]}$. (i) Determinare il massimo limite di $\{a_n\}$. (ii)* Determinare $\mathscr{L}_{\{a_n\}}$.

Soluzione (i) La successione $\{a_n\}$ può assumere solo i valori 2, 0 e -2. Se $n_k = 12k$, allora $a_{n_k} = 2$ quindi il massimo limite è 2.

(ii) La successione $\{a_n\}$ è una funzione periodica di periodo 12 (come si verifica facilmente); se $m_k = 2 + 12k$, allora $a_{m_k} = 0$ e se $p_k = 3 + 12k$, allora $a_{p_k} = -2$. Quindi $\mathscr{L}_{\{a_n\}} = \{-2, 0, 2\}$.