Es 1 Trovare l'insieme dei numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che:
(i) $4x - 3 \leq \frac{7x+2}{5}$; (ii) $-4x + 3 \leq \frac{7x-2}{5}$; (iii) $x(x-1) > 0$; (iv) $x(x-1)^{n^2} > 0$, ($n \in \mathbb{N}$);
(v) $\frac{x}{x-1} \leq 0$; (vi) $\frac{1+x}{x^2-x} > 0$; (vii) $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{x}$; (viii) $4x^3 + x \leq 5x^2$.

Es 2 Trovare l'insieme dei numeri $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfano le disuguaglianze (i)÷(viii) dell'Es 1.
(ii) Trovare l'insieme dei numeri $x \in \mathbb{N}$ che soddisfano le disuguaglianze (i)÷(viii) dell'Es 1.

Es 3 Dimostrare per induzione che $\forall\ n \in \mathbb{N}$ si ha:
(i) $2^n \geq 2n$; (ii) $3^n > n^2$; (iii) $n^3 + 2n$ è divisile per 3;
(iv) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$;
(v) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$;
(vi) $\Big(1+1\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big) = n+1$; (vii) $n! \geq 2^n \geq n^2$ per ogni $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$; se ne deduca, in particolare, che $2^n \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{3\}$.