PRIMO ESONERO - Parte 3 – *AM110 – CL Matematica (AA 2019/20 – L. Chierchia). 13/11/2020*

NOME:________________ **COGNOME:**____________________ **MATRICOLA:**________________

VALUTAZIONE:

Es 1 [10]	Es 2 [15]	Es 3 [15]	totale

• **MOTIVARE SEMPRE LE RISPOSTE**: *Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Es 1 [Pt. 10] Dimostrare (usando la definizione) che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+8}{3n^2-1} = \frac{1}{3}$.

Soluzione Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $3n^2 - 1 \geq 2n^2$, per cui

$$\Big|\frac{n^2+8}{3n^2-1} - \frac{1}{3}\Big| = \frac{25}{3}\ \frac{1}{3n^2-1} \leq \frac{25}{6}\ \frac{1}{n^2}\,.$$

Quindi, se $n > N := \frac{5}{\sqrt{6\varepsilon}}$, allora $\left|\frac{n^2+8}{3n^2-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

Es 2 [Pt. 15] Per $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n := \dfrac{n^3 - 5n + 10}{n+1}$.
(i) Dimostrare che, per ogni $n \geq 3$, $a_n \geq 3$. (ii) Trovare estremo superiore e inferiore (se esistono, specificando se si tratta di massimo o minimo) dell'insieme $A := \{a_n \big| \, n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione (i): $a_n \geq 3 \iff \dfrac{n^3 - 8n + 7}{n+1} \geq 0 \iff n^3 - 8n + 7 \geq 0$. Se $n \geq 3$, si ha:

$$n^3 - 8n + 7 = n(n^2 - 8) + 7 \geq n + 7 > 0\,,$$

e quindi $a_n \geq 3$, per ogni $n \geq 3$.
(ii): $a_1 = 3$, $a_2 = 8/3$ e $a_n \geq 3$ per ogni $n \geq 3$. Quindi $\min A = a_2 = 8/3$.
A non è limitato superiormente. Infatti sia $M \geq 2$ e sia $N := 3\sqrt{M/2} \geq 3$. Allora, se $n \geq N$, si ha:

$$a_n = \frac{n^3\Big(1 - \frac{5}{n^2}\Big) + 10}{n+1} \geq \frac{n^3\Big(1 - \frac{5}{9}\Big) + 10}{2n} = \frac{\frac{4}{9}n^3 + 10}{2n} > \frac{\frac{4}{9}n^3}{2n} = \frac{2}{9}n^2 \geq \frac{2}{9}N^2 = M.$$

Es 3 [Pt. 15] Dimostrare che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $3^n > n^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq N$.

Soluzione Sia P_n la relazione $3^n > n^3$ e si noti che P_1 e P_2 sono vere, mentre P_3 è falsa. Dimostriamo, per induzione, che P_n è vera per ogni $n \geq 4$. P_4 è vera essendo $3^4 = 81 > 64 = 4^3$. Assumiamo P_n e dimostriamo P_{n+1}. Per ogni $n \geq 4$, si ha

$$1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{64} = \frac{125}{64} < 2\,,$$

e, moltiplicando per n^3 tale relazione, si ottiene $(n+1)^3 < 2n^3 < 3n^3$, che, per l'ipotesi induttiva P_n, è minore di $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. ∎