TESTI con soluzioni

Es 1 [Pt. 10] Discutere il $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right)}$.

Soluzione $\log\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+(\cos\frac{1}{n}-1)\right) \sim \cos\frac{1}{n}-1 \sim -\frac{1}{2n^2}$ e $\operatorname{senh}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^2}$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Es 2 [Pt. 6] Discutere il $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n}{e^{\sqrt{\log n}}}$.

Soluzione $\dfrac{n^2+3n}{e^{\sqrt{\log n}}} \sim \dfrac{n^2}{e^{\sqrt{\log n}}} = e^{\log n\cdot\left(2-\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)}$ e, per l'algebra dei limiti estesa, si ha che $\log n\cdot\left(2-\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\to\infty$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n}{e^{\sqrt{\log n}}} = +\infty\,.$$

Es 3 [Pt. 12] Discutere la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot\log n\cdot\log\log n}$.

Soluzione $\frac{1}{n\cdot\log n\cdot\log\log n} \searrow 0$ quindi, per il criterio di condensazione di Cauchy e il criterio di confronto asintotico si ha che

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\log n\cdot\log\log n} &\approx \sum_{n=2}^{\infty} 2^n\cdot\frac{1}{2^n\cdot\log 2^n\cdot\log\log 2^n} = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n+\log\log 2)}\\ &\approx \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} \approx \sum_{n=2}^{\infty} 2^n\cdot\frac{1}{2^n\log 2^n} = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \approx \sum_{n=2}^{\infty} 2^n\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 1\\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

Es 4 [Pt. 16] Discutere, la variare del parametro $x\in\mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\tanh(x^2-2)^n}{n}$.

Soluzione Convergenza assoluta: $\left|\frac{\tanh(x^2-2)^n}{n}\right| = \frac{\tanh|x^2-2|^n}{n}$. Se $|x^2-2|\ge 1$, $\frac{\tanh|x^2-2|^n}{n} \ge \frac{\tanh 1}{n}$ e la serie diverge assolutamente (per confronto con la serie armonica); se $|x^2-2|<1$, ossia se $x\in E := (-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$, allora si ha che $\frac{\tanh|x^2-2|^n}{n} \sim \frac{|x^2-2|^n}{n}$ e la serie converge assolutamente per il criterio della radice.
Studiamo, ora, la serie in $E^c = \{x\,|\, x^2-2\ge 1\}\cup\{x\,|\, x^2-2\le -1\}$. Se $x^2-2\ge 1$ (ossia, $|x|\ge\sqrt{3}$), $\frac{\tanh(x^2-2)^n}{n} \ge \frac{\tanh 1}{n}$ e la serie diverge a $+\infty$. Se $x^2-2\le -1$ (ossia, $|x|\le 1$), la serie è a segni alterni e converge condizionatamente per il criterio di Leibniz.

Es 5 [Pt. 16] (i) Discutere il massimo e minimo limite della successione $a_n := \dfrac{\left\{\frac{n}{4}\right\}n^2+1}{n(n+1)}$, (dove $\{\cdot\}$ denota la parte frazionaria). (ii)* Qual è l'insieme $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$ dei possibili limiti di $\{a_n\}$?

Soluzione (i): La funzione $n\in\mathbb{N}\mapsto\{n/4\}$ è periodica di periodo 4 e $D := \big\{\{n/4\}\big|\, n\in\mathbb{N}\big\} = \big\{0,\frac14,\frac12,\frac34\big\}$, dunque $0\le a_n\le \frac{\frac34 n^2+1}{n(n+1)} \to \frac34$. Quindi $\mathcal{L}_{\{a_n\}}\subseteq[0,\frac34]$. Se $n_k=4k$, $a_{n_k} = \frac{1}{n(n+1)}\to 0$; se $m_k = 3+4k$, $a_{m_k} = \frac{\frac34 n^2+1}{n(n+1)} \to \frac34$. Quindi $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = \frac34$.
(ii) Sia $\{a_{j_k}\}$ una qualunque successione convergente a L e sia $b_k := \left\{\frac{j_k}{4}\right\}$. Allora, si ha che $b_k = a_{j_k}\left(1+\frac{1}{j_k^2}\right)-\frac{1}{j_k^2}\to L$ e quindi si deve avere $L\in D$. Ma allora, $\mathcal{L}_{\{a_n\}}\subseteq D$. Abbiamo visto che $0, 3/4\in\mathcal{L}_{\{a_n\}}$ e se $\bar n_k := 1+4k$ e $\bar m_k = 2+k$, si ha che $\lim a_{\bar n_k} = 1/4$ e $\lim a_{\bar m_k} = 1/2$. Quindi $\mathcal{L}_{\{a_n\}} = D$.