APPELLO A - Es 2–9 – *AM110 – CL Matematica (AA 2021/22 – L. Chierchia). 27/1/2022*

Parte 1, Es 2–5

Es 2 [Pt. 10] Discutere i seguenti limiti: (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$; (ii) $\lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big)$.

Es 3 [Pt. 10] Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\Big)^3$.

Es 4 [Pt. 8] Nel piano cartesiano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$, disegnare il "triangolo curvilineo" delimitato dall'asse delle x, dalla retta $\{x=\pi/4\}$ e dal grafico di $y=\tan x$ e calcolarne l'area.

Es 5 [Pt. 6] Dimostrare per induzione che $n! \geq 2^{n-1}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Parte 2, Es 6–9

Es 6 [Pt. 10] Disegnare il grafico della funzione $y = x + e^{10\arctan x}$ dandone una giustificazione analitica.

Es 7 [Pt. 15] Si discuta la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^{3n}}{n} - xn^{2x}\Big)$, al variare del parametro reale x.

Es 8 [Pt. 15] Dire se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ è convergente ed in caso affermativo calcolarne il valore.

Es 9 [Pt. 10] Si consideri l'equazione differenziale $(*)\quad \dot{x} = \frac{x\log x}{t}$, dove $x = x(t)$.
(i) Si determini la soluzione di $(*)$ tale che $x(1)=2$.
(ii) (Facoltativo) Esistono soluzioni stazionarie (ossia, costanti al variare del tempo t) di $(*)$?

Risposte:

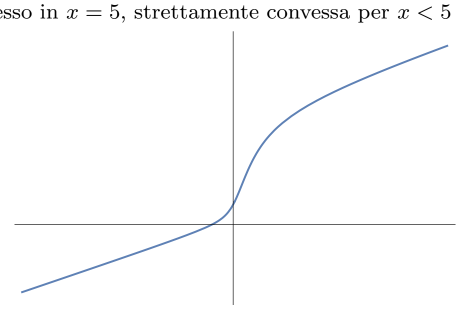
Es 2 (i) 1/4. (ii) il limite non esiste [$(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ ma $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} 1/x$ non esiste].

Es 3 la serie converge [si usi, ad esempio $\log n < n^{1/12}$ per $n \geq N$ con N opportuno]

Es 4 area triangolo curvilineo $= \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \frac{1}{2}\log 2$.

Es 5 Per $n=1$ la disuguaglianza è vera. Assumiamo $n! \geq 2^{n-1}$ con $n \geq 1$. Allora, $(n+1)! = (n+1)\cdot n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$. $\blacksquare$

Es 6 La funzione è strettamente crescente; asintoti obliqui: $y = x + e^{5\pi}$ a $+\infty$ e $y = x+e^{-5\pi}$ a $-\infty$; punto di flesso in $x=5$, strettamente convessa per $x<5$ e strettamente concava per $x>5$.



Es 7 La serie converge assolutamente per $-1 < x < -1/2$; converge condizionatamente per $x=-1$; non converge altrimenti.

Es 8 L'integrale converge per confronto asintotico con $1/x^3$ ed il suo valore è $\frac{1}{2}\log 2$.

Es 9 (i) $x(t) = 2^t$. (ii) Sì: $x(t)\equiv 1$.

<u>Commenti:</u>

Es 2 L'errore pi frequente stato sul punto (ii) (la non esistenza del limite di $\operatorname{sen}(1/x)$): in ogni intorno di 0 ci sono punti dove $\operatorname{sen}(1/x)$ vale 1 e punti dove vale -1 ossia per ogni $\delta>0$ esistono $0<x_1<x_2<\delta$ tali che $\operatorname{sen}(1/x_1)=1$ e $\operatorname{sen}(1/x_2)=-1$ (trovarli!)

Es 3 Molti hanno usato il criterio di condensazione di Cauchy (anche se molto pi elementare l'argomento dato sopra), senza per dimostrare che la successione decrescente.

Es 4 Alcuni hanno di nuovo dato un valore negativo per un'area, ma l'"errore" pi frequente stato non scrivere nella maniera pi semplice possibile il risultato, che una cosa molto importante!

Es 5 Qui il problema principale stato scrivere in modo corretto la matematica (che si acquisisce con l'esperienza).

Es 6 Attenzione agli asintoti!

Es 7 Questo era l'esercizio tecnicamente pi difficile che pochissimi hanno svolto in modo soddisfacente. Questo tipo di esercizi verr ripreso ad AM120.

Es 8 Se l'integrando è positivo il risultato deve essere positivo!

Es 9 Quasi tutti hanno sbagliato la costante da determinare in termini del dato iniziale e comunque se avessero verificato equazione e dato iniziale se ne sarebbero accorti..