

Parte 1, Es 2-5

Es 2 [Pt. 12] Discutere il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+n^2}} \right)$.

Es 3 [Pt. 12] Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n + \arctan \sqrt{n}}$.

Es 4 [Pt. 16] (i) Calcolare $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$. (ii) Sia $f(x) := \min\{e^x, e^{-x}\}$. Disegnare il grafico di f e calcolare l'area (se finita) della regione (illimitata) tra il grafico di f e l'asse delle x .

Es 5 [Pt. 14] (i) Si studi il grafico di $x^4 e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$. (ii) Sia $A := \{x = n^4 e^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si determini l'estremo superiore e inferiore di A specificando se si tratti massimo o minimo.

Parte 2, Es 6-8

Es 6 [Pt. 12] Si discuta l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{(x^x - 1)^2} dx$.

Es 7 [Pt. 12] Si discuta la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{2n})}{(2+n)x^n}$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, specificando dove la serie converge assolutamente, dove converge ma non assolutamente e dove non converge.

Es 8 [Pt. 10] Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x \sin t = 2 \sin t$, con dato iniziale $x(0) = 0$.

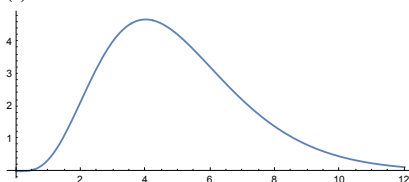
Risposte:

Es 2: 1 ("razionalizzando")

Es 3: la serie si comporta come $\sum \frac{1}{n \log^2 n}$ (per confronto asintotico) e quindi converge per il criterio di condensazione di Cauchy.

Es 4 (i) $\log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$ dove $t := \sqrt{2x+1}$. (ii) Osservando che $f(x) = e^{-|x|}$ si ha che f è pari e che per $x \geq 0$ il grafico coincide col grafico di e^{-x} ; poiché $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, l'area è finita e vale 2.

Es 5 (i):



(massimo in $x = 4$, flessi in $x = 2$ e $x = 6$). (ii): $M = (4/e)^4$ è il massimo e $m = 0$ è l'estremo inferiore (che non è minimo).

Es 6 Diverge in $x = 1$ (in $+\infty$ converge); vicino a 1, per confronto asintotico, l'integrale si comporta come $\int_1^2 dx/(x^2 \log^2 x)$, che facendo il cambio di variabile $t = \log x$ si vede che diverge.

Es 7 Se $|x| > 1$, $\frac{\log(1+x^{2n})}{(2+n)|x|^n} \sim \frac{\log x^2}{|x|^n}$ e quindi converge assolutamente; se $0 < |x| < 1$, $\frac{\log(1+x^{2n})}{(2+n)|x|^n} \sim \frac{|x|^n}{n}$ e quindi la serie converge assolutamente (criterio della radice); se $x = 1$, la serie diverge; se $x = -1$, la serie converge (ma non assolutamente) per Leibnitz.

Es 8 $x(t) = 2 \left(1 - e^{(\cos t) - 1} \right)$.