

Es 2 [Pt. 14] Discutere il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sin n}{n + \log n} \left(e^{1/n} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Es 3 [Pt. 20] Calcolare i seguenti integrali: (i) $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + x + 1}$. (ii) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$.

Es 4 [Pt. 20] Sia $f(x) = \arctan \frac{x^2}{1-x^2}$. (i) Si studi il grafico di f sul suo dominio di definizione.
(ii) Sia $A := \{f(1/n) | n \geq 2\}$. Si determini il sup e l'inf di A (specificando se si tratti di massimo/minimo).

Es 5 [Pt. 16] Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(e^{\sqrt{n}} + n^2)}$.

Es 6 [Pt. 14] Si discutano i seguenti integrali impropri: (i) $\int_0^1 \frac{dx}{|\log x|}$; (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} |\log x|}$

Soluzioni

Es 2 Il valore del limite è $3/2$. Infatti, $\frac{n^2 + \sin n}{n + \log n} \sim n$ per $n \rightarrow +\infty$ (ossia $n^{-1}(\frac{n^2 + \sin n}{n + \log n}) \rightarrow 1$) e

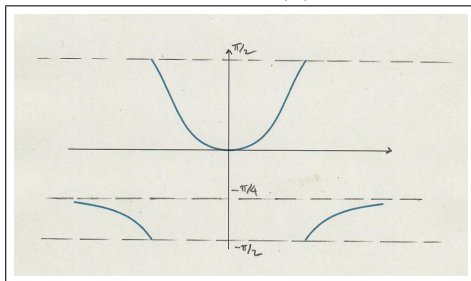
$$n \left(e^{1/n} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{1/n} + \frac{1}{1/n} (1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}) \rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Es 3 (i) $3x^2 + x + 1 = \frac{11}{12} \left(\left(\frac{6}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{6} \right) \right)^2 + 1 \right)$; quindi, facendo il cambio di variabile $u = \frac{6}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{6} \right)$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{11}} \int_{\frac{1}{\sqrt{11}}}^{\frac{7}{\sqrt{11}}} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(\arctan \frac{7}{\sqrt{11}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{11}} \right).$$

$$(ii) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x \cdot (\tan x)' dx = \frac{\tan^3 x}{3}.$$

Es 4 (i) Dominio di f è $A := \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1\}$. Essendo f pari basta studiare la funzione in $[0, +\infty)$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \pi/2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = -\pi/2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\pi/4$. $f'(x) = \frac{2x}{2x^4 - 2x^2 + 1}$ e quindi $f' > 0$ per $A \cap \{x > 0\}$ ossia f è strettamente crescente su $[0, 1)$ e su $(1, +\infty)$ (ma non su $[0, +\infty)$!); $f'(0) = 0$ che è un punto di minimo relativo stretto. Flessi: $f''(x) = -2 \frac{6x^4 - 2x^2 - 1}{2x^4 - 2x^2 + 1}$ e $f'' = 0$ su $A \cap \{x > 0\}$ se e solo se $x = \frac{\sqrt{7}+1}{6}$. Si noti che $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f'(x) = 2$.



In $(0, 1)$ f è strettamente crescente; quindi, per $n \geq 2$, $n \rightarrow f(1/n)$ è strettamente decrescente. Quindi $\max A = f(1/2) = \arctan 1/3$ e $\inf A = 0$ (che non è un minimo).

Es 5 $\lim \left| \frac{x^n}{\log(e^{\sqrt{n}} + n^2)} \right|^{1/n} = |x|$; quindi (criterio della radice) la serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$ (poiché il termine ennesimo non tende a 0). Per $x = 1$ diverge, essendo $\frac{1}{\log(e^{\sqrt{n}} + n^2)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$. Per $x = -1$ la serie converge semplicemente per Leibnitz essendo a segni alterni e $\frac{1}{\log(e^{\sqrt{n}} + n^2)} \searrow 0$.

Es 6 (i) $\int_0^{1/2} \frac{1}{|\log x|}$ converge essendo $\frac{1}{|\log x|}$ continua e limitata in $(0, 1/2)$.

Facendo il cambio di variabile $y = -\log x$ si ha $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{|\log x|} = \int_0^{\log 2} \frac{e^{-y}}{y} dy \approx \int_0^{\log 2} \frac{1}{y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \log 2 + \log \varepsilon^{-1}) = +\infty$. Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{|\log x|} = +\infty.$$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{x} |\log x|} > \frac{1}{|\log x|}$ se $x \in (0, 1)$ e quindi per il punto (i) (e per il criterio del confronto) diverge anche questo integrale.