CAPITOLO 6

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

6.1. Equazioni a variabili separabili

• Richiami: ricordiamo che un'equazione differenziale del primo ordine è detta *a variabili separabili* se è della forma

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

dove f, g sono funzioni continue nei loro insiemi di definizione.

Per determinare l'integrale generale di un'equazione a variabili separabili, si procede in due passi:

- (i) si determinano gli eventuali valori reali $\bar{y}$ tali che $g(\bar{y}) = 0$, da cui si ottiene che le funzioni costanti, date da $y(x) = \bar{y}$, sono *soluzioni singolari* (o anche *soluzioni particolari*) dell'equazione;
- (ii) per $y \neq \bar{y}$, si procede con la separazione delle variabili, ottenendo

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

ed effettuando un cambiamento di variabile nel primo integrale, si ottiene

$$\left(\int \frac{1}{g(y)} dy \right)_{y=y(x)} = \int f(x) dx .$$

Dette G ed F due primitive di $1/g$ ed f , rispettivamente, si ha

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

da cui si ricaverà esplicitamente l'integrale generale dell'equazione proposta, una volta che si è in grado di invertire la funzione G .

È ben noto che, dati due intervalli reali I e J , con $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) ; \\ y(x_0) = y_0 ; \end{cases}$$

dove $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(J)$, esso ha sempre una ed una sola soluzione di classe C^1 , definita in un intorno del punto iniziale x_0 . Essa andrà cercata o tra le soluzioni singolari (se ne esistono e una di queste verifica la condizione iniziale) oppure, in caso contrario, imponendo la condizione iniziale all'integrale generale ottenuto per separazione di variabili.

• Esercizi

ESERCIZIO 6.1. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y^4(x)} ; \\ y(0) = 1 . \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale proposta è definita per $y \neq 0$. Poiché essa è un'equazione a variabili separabili e non ha soluzioni singolari, si ottiene $\int y^4 dy = \int x dx$ che fornisce l'integrale generale

$$\frac{y^5(x)}{5} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$C = \frac{1}{5} \quad \text{ovvero} \quad \frac{y^5(x)}{5} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{da cui} \quad y(x) = \sqrt[5]{\frac{5}{2}x^2 + 1}.$$

ESERCIZIO 6.2. Siano $y_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y^{n+1}(t); \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(1)$.

Svolgimento: L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione singolare costante $y(t) \equiv 0$ e, imponendo $y \neq 0$, da

$$-\int \frac{dy}{y^{n+1}} = \int dt \implies \frac{1}{n} y^{-n} = t + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo subito la condizione iniziale, otteniamo $C = 1/n$, da cui

$$y_n(t) = (nt + 1)^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{nt + 1}}.$$

Notiamo che la soluzione è definita solo nell'intervallo $(-1/n, +\infty)$. Infine,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1.$$

ESERCIZIO 6.3. Dati i problemi di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y'(x) + \frac{6x+3}{x^2+x+1}(y(x)-1)^2 = 0; \\ y(0) = \frac{3 \log 3 - 1}{3 \log 3}; \end{cases} \quad (**) \quad \begin{cases} y'(x) + \frac{6x+3}{x^2+x+1}(y(x)-1)^2 = 0; \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

determinare le rispettive soluzioni.

Svolgimento: Poiché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'equazione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che l'equazione comune ad entrambi i problemi di Cauchy è a variabili separabili ed ha come integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 1$. Pertanto, (**) ha come unica soluzione definita su tutto l'asse reale la funzione costante $y(x) \equiv 1$, cioè l'integrale singolare. Per trovare invece l'unica soluzione di (*), si procede separando le variabili e, dopo una semplice integrazione, si ottiene

$$\frac{1}{y-1} = 3 \log(x^2 + x + 1) + C$$

da cui, esplicitando y e imponendo la condizione iniziale, si ha

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3 \log\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)},$$

che risulta definita per $x \neq -2, 1$. Essendo stata assegnata la condizione iniziale nel punto $x = 0$, la soluzione richiesta sarà definita in $(-2, 1)$.

ESERCIZIO 6.4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + x^3 y^3(x) + x^3 y(x) = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.5. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x) \log y(x)}{x}; \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

6.2. Equazioni lineari del primo ordine

• Richiami: ricordiamo che le equazioni differenziali lineari del primo ordine sono equazioni differenziali della forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

con a, b funzioni continue nel loro insieme di definizione I . Se $b(x) \equiv 0$ in I , l'equazione si chiama omogenea ed è, in particolare, anche un'equazione a variabili separabili; se invece b non è la funzione identicamente nulla, allora l'equazione è detta non omogenea.

L'integrale generale di un'equazione lineare del primo ordine è dato da

$$y(x) = C e^{-\int a(x) dx} + e^{-\int a(x) dx} \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx.$$

Osserviamo che il primo addendo della precedente formula è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata⁽¹⁾, mentre il secondo addendo è una soluzione particolare dell'equazione completa⁽²⁾.

È ben noto che il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine ha sempre una ed una sola soluzione di classe C^1 definita in tutto l'intervallo I ed essa viene determinata imponendo la condizione iniziale nell'espressione precedente. Infatti, siano $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e sia assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Allora la soluzione è data da

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} \int_{x_0}^x b(t) e^{\int_{x_0}^t a(s) ds} dt.$$

(1) esso si può determinare per separazione di variabili o, nel caso in cui a sia costante, tramite l'equazione caratteristica associata.

(2) esso si può determinare utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie oppure, nel caso in cui a sia costante e b sia di tipo polinomiale, esponenziale o trigonometrico, tramite il principio di somiglianza.

• Esercizi

ESERCIZIO 6.6. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 5y(x) + e^x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea; pertanto, dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = e^{\int_0^x 5 dt} \int_0^x e^{-\int_0^t 5 ds} e^t dt = e^{5x} \int_0^x e^{-4t} dt = \frac{1}{4} e^{5x} - \frac{1}{4} e^x.$$

ESERCIZIO 6.7. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} y(x) = 1$$

e trovare le (eventuali) soluzioni tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

Svolgimento: L'equazione è definita per $x > 0$. Usando la formula risolutiva, abbiamo

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} \left[\int e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} dx + C \right] = e^{-2\sqrt{x}} \left[\int e^{2\sqrt{x}} dx + C \right].$$

Effettuando la sostituzione $t = 2\sqrt{x}$, da cui $dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, ovvero $dx = \frac{1}{2} dt$, abbiamo

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2} \int te^t dt + C \right]_{t=2\sqrt{x}} = e^{-2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2} te^t - \frac{1}{2} \int e^t dt + C \right]_{t=2\sqrt{x}} \\ &= e^{-2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2} te^t - \frac{1}{2} e^t + C \right]_{t=2\sqrt{x}} = e^{-2\sqrt{x}} \left[\sqrt{x} e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}} + C \right] \\ &= \sqrt{x} - \frac{1}{2} + C e^{-2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Imponendo ora la condizione asintotica, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} + C e^{-2\sqrt{x}} \right) = +\infty \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 6.8. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(t) + y(t) = 1 - t.$$

Svolgimento: L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea; pertanto, utilizzando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(t) = C e^{-\int 1 dt} + e^{-\int 1 dt} \int (1-t) e^{\int 1 dt} dt = C e^{-t} + e^{-t} \int (1-t) e^t dt = C e^{-t} - t + 2.$$

ESERCIZIO 6.9. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) = e^x(x+1); \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Svolgimento: Dalla formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine, con $a(x) = x$ e $b(x) = e^x(x+1)$, si ottiene che l'integrale generale è dato da

$$\begin{aligned} y(x) &= C e^{-\int x dx} + e^{-\int x dx} \int e^x(x+1) e^{\int x dx} dx \\ &= C e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \int (x+1) e^{(x^2/2+x)} dx \\ &= C e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \int e^{(x^2/2+x)} (x^2/2 + x)' dx = C e^{-x^2/2} + e^x. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = 1$, da cui la soluzione cercata $y(x) = e^{-x^2/2} + e^x$.

ESERCIZIO 6.10. Data l'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{3 \cos x}{1 + \sin x} y(x) = 0,$$

determinare la soluzione passante per il punto $P_0 = (\pi/2, 1)$.

6.3. Equazioni lineari del secondo ordine

• Richiami: ricordiamo che le equazioni differenziali lineari del secondo ordine sono equazioni differenziali della forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

con a, b, f funzioni continue nel loro insieme di definizione I . Se $f(x) \equiv 0$ in I , l'equazione si chiama *omogenea*, se invece f non è la funzione identicamente nulla, allora l'equazione è detta *non omogenea*. Se a, b sono delle funzioni costanti, l'equazione si chiama a *coefficienti costanti*.

Per determinare l'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine, si procede in tre passi:

- (i) si trova l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
- (ii) si determina una soluzione particolare dell'equazione completa;
- (iii) infine, detti y_o e y_p , rispettivamente, l'integrale generale dell'omogenea associata e l'integrale particolare dell'equazione completa, la soluzione cercata sarà della forma

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) \quad \forall x \in I.$$

Osserviamo che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y_o(x)$ è della forma $y_o(x) = C_1 y_{o1}(x) + C_2 y_{o2}(x)$, cioè combinazione lineare di due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, mentre y_p si determina come segue.

Data f , funzione continua, si procede utilizzando il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*, cioè determinando le due funzioni $C_1(x)$ e $C_2(x)$, le cui derivate sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} C_1'(x) y_{o1}(x) + C_2'(x) y_{o2}(x) = 0 \\ C_1'(x) y_{o1}'(x) + C_2'(x) y_{o2}'(x) = f(x). \end{cases}$$

Una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = C_1(x)y_{o1}(x) + C_2(x)y_{o2}(x)$.

È ben noto che il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine ha sempre una ed una sola soluzione di classe C^2 definita in tutto l'intervallo I ed essa può essere determinata imponendo la condizione iniziale nell'espressione precedentemente trovata per l'integrale generale dell'equazione completa.

Rimane aperto il problema di determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata; ciò è possibile solo in alcune situazioni particolari. Noi ci limiteremo a considerare esclusivamente i seguenti due casi: quello delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e quello delle equazioni di Eulero, che sono equazioni a coefficienti variabili, ma che, come vedremo, si possono ricondurre al caso delle equazioni a coefficienti costanti con un opportuno cambiamento di variabile.

- Equazioni a coefficienti costanti: si tratta di equazioni differenziali della forma

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, per $i = 0, 1, 2$, e $a_0 \neq 0$. Per determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, si considera l'equazione caratteristica o secolare associata, cioè l'equazione algebrica del secondo ordine data da:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

A seconda che il discriminante di tale equazione sia positivo, nullo o negativo, l'equazione avrà, rispettivamente, due soluzioni reali distinte, una sola soluzione reale, due soluzioni complesse coniugate. In corrispondenza, avremo le due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale omogenea, secondo la seguente tabella:

{	$\Delta > 0$ soluzioni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinte	$\begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda_1 x}, \\ y_{o2}(x) = e^{\lambda_2 x}, \end{cases}$
	$\iff y_o(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$	
	$\Delta = 0$ unica soluzione $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda x}, \\ y_{o2}(x) = x e^{\lambda x}, \end{cases}$
$\iff y_o(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x};$		
$\Delta < 0$ soluzioni $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ y_{o2}(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \end{cases}$	
$\iff y_o(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)].$		

Ricordiamo anche che, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti e per particolari funzioni continue f , una soluzione particolare dell'equazione completa si può determinare evitando tutta la

procedura della variazione delle costanti, ed utilizzando, invece, il *metodo di somiglianza*:

• $f(x) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} x + \alpha_r$ polinomio di grado r

$\implies$

$$y_p(x) = p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \dots + p_{s-1} x + p_s$$

{ polinomio di grado $s = r + 2 - m$
dove $m = 0, 1, 2$ è il più grande indice
t.c. $a_m \neq 0$ nell'equazione
differenziale;

• $f(x) = e^{Ax} [\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} x + \alpha_r]$

$\implies$

$$y_p(x) = e^{Ax} x^m [p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + \dots + p_{r-1} x + p_r]$$

{ dove $m = 0$, se A non è soluzione
dell'equazione caratteristica, $m = 1, 2$,
se tale è la molteplicità con cui A è
soluzione dell'equazione caratteristica.

• $f(x) = e^{Ax} [k_1 \cos(Bx) + k_2 \sin(Bx)]$

{ $A = 0$ funzione trigonometrica pura,
 $B = 0$ funzione esponenziale pura,

$\implies$

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{Ax} [p_1 \cos(Bx) + p_2 \sin(Bx)] \\ x e^{Ax} [p_1 \cos(Bx) + p_2 \sin(Bx)] \end{cases}$$

{ se $A + iB$ non è soluzione
dell'equazione caratteristica.
se $A + iB$ è soluzione dell'equazione
caratteristica;

Restano da determinare i coefficienti p_i , che si ricavano come soluzioni dell'equazione ottenuta inserendo l'espressione trovata per $y_p(x)$ nell'equazione differenziale completa.

Nel caso in cui f risulti essere la somma di più termini $f_1 + f_2 + \dots$, si può ricorrere al *principio di sovrapposizione*, cioè si determina una soluzione particolare relativa all'equazione completa con secondo membro dato di volta in volta da ciascuna f_i separatamente (cioè: $a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f_i(x)$); una soluzione particolare relativa al secondo membro pari ad f si otterrà sommando le soluzioni così trovate. Questo principio può risultare molto utile proprio quando tutte o almeno alcune delle f_i si possono determinare con il metodo di somiglianza.

• Equazioni di Eulero: si tratta di equazioni lineari a coefficienti non costanti di forma particolare, che si possono ricondurre ad equazioni a coefficienti costanti. Più precisamente, un'equazione di Eulero del secondo ordine è della forma:

$$a_0 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_2 y(x) = f(x).$$

Non è difficile verificare che, con la sostituzione di variabile $x = e^t$, nel caso si cerchino soluzioni per $x > 0$, la precedente equazione si trasforma nell'equazione lineare data da

$$(6.1) \quad a_0 \tilde{y}''(t) + (a_1 - a_0) \tilde{y}'(t) + a_2 \tilde{y}(t) = \tilde{f}(t),$$

dove $\tilde{f}(t) = f(e^t)$. A questo punto abbiamo un'equazione a coefficienti costanti, che si tratta come visto in precedenza. Una volta trovato l'integrale generale come funzione di t , si effettua la trasformazione inversa di variabile $t = \log x$, ottenendo così l'integrale generale dell'equazione di Eulero proposta, che sarà della forma $y(x) = c_1 y_{o1}(x) + c_2 y_{o2}(x) + y_p(x)$, con

$$\begin{aligned} y_{o1}(x) &= x^{\lambda_1} & y_{o2}(x) &= x^{\lambda_2}; \\ y_{o1}(x) &= x^\lambda & y_{o2}(x) &= x^\lambda \log x; \\ y_{o1}(x) &= x^\alpha \cos(\beta \log x) & y_{o2}(x) &= x^\alpha \sin(\beta \log x); \end{aligned}$$

dove λ_1, λ_2 , oppure λ , oppure $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica associata a (6.1), a seconda del segno del discriminante. Nel caso in cui si cerchino soluzioni per $x < 0$, si procede in modo analogo, con la sostituzione $x = -e^t$, ovvero $t = \log(-x)$.

• Esercizi

ESERCIZIO 6.11. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \sin x; \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 1; -2$; pertanto,

$$y_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Poiché $f(x) = \sin x$ (cioè $A = 0$ e $B = 1$ nella tabella relativa al metodo di somiglianza) e $\lambda = 0 + i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, il metodo di somiglianza suggerisce che una soluzione particolare sarà della forma

$$y_p(x) = p_1 \cos x + p_2 \sin x,$$

dove è necessario scegliere sempre una combinazione di seni e coseni, anche se il termine noto dell'equazione assegnata contiene solo una delle due funzioni trigonometriche. Derivando due volte la soluzione particolare considerata ed inserendo quanto trovato nell'equazione differenziale di partenza, otteniamo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -p_1 \sin x + p_2 \cos x \\ y_p''(x) &= -p_1 \cos x - p_2 \sin x \\ (-p_1 - 3p_2) \sin x + (p_2 - 3p_1) \cos x &= \sin x \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} -p_1 - 3p_2 = 1, \\ p_2 - 3p_1 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{1}{10}, \\ p_2 = -\frac{3}{10}. \end{cases}$$

L'integrale generale sarà, quindi, dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} y(0) = \left(C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x \right)_{x=0} = C_1 + C_2 - \frac{1}{10} = 0 \\ y'(0) = \left(C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x \right)_{x=0} = C_1 - 2C_2 - \frac{3}{10} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{6} \\ C_2 = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{15} e^{-2x} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$$

ESERCIZIO 6.12. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) - 18y(x) = 11e^{-2x},$$

determinare l'integrale generale e le (eventuali) soluzioni che verificano le condizioni

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

Svolgimento: Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 6; -3$, si ottiene

$$y_o(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x}.$$

Poiché $f(x) = e^{-2x}$ e $\lambda = -2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, il metodo di somiglianza suggerisce di cercare una soluzione particolare della forma $y_p(x) = pe^{-2x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione differenziale assegnata, ricaviamo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -2pe^{-2x} \\ y_p''(x) &= 4pe^{-2x} \\ p(4 + 6 - 18) e^{-2x} &= 11e^{-2x}, \end{aligned}$$

da cui $p = -11/8$. L'integrale generale risulta quindi essere

$$y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x} - \frac{11}{8} e^{-2x}.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |C_1 e^{6x}| = +\infty \quad \forall C_1 \neq 0,$$

occorre imporre $C_1 = 0$. L'altra condizione, invece, implica

$$y(0) = C_2 - \frac{11}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 11/8,$$

da cui la soluzione cercata risulta essere unica e data da

$$y(x) = \frac{11}{8} (e^{-3x} - e^{-2x}).$$

ESERCIZIO 6.13. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$3y''(x) + 4y(x) = \sin x.$$

Svolgimento: Osserviamo che l'equazione differenziale assegnata è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 + 4 = 0$. Quest'ultima ha come soluzioni $\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}i$ e $\lambda_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}i$; pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = C_1 \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right).$$

Poiché l'equazione contiene solo derivate pari, è sufficiente considerare, per il metodo di somiglianza, una soluzione particolare della forma $y_p(x) = p \sin x$, da cui segue $y''(x) = -p \sin x$. Da ciò, si ottiene $p = 1$; pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + \sin x.$$

ESERCIZIO 6.14. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0.$$

Svolgimento: L'equazione proposta è un'equazione di Eulero ed è definita per $x > 0$ oppure $x < 0$. Determiniamo la soluzione per $x > 0$ (in modo analogo si procede per $x < 0$). Operando la sostituzione $x = e^t$, l'equazione si riconduce all'equazione lineare del secondo ordine

$$\tilde{y}''(t) - 4\tilde{y}'(t) + 8\tilde{y}(t) = 0$$

la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. Pertanto, l'integrale generale sarà dato da

$$\tilde{y}(t) = e^{2t} (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$$

ovvero

$$y(x) = x^2 (C_1 \cos(2 \log x) + C_2 \sin(2 \log x)).$$

ESERCIZIO 6.15. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - 5y'(x) + \frac{8}{x}y(x) = x^2; \\ y(1) = 0; \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: Moltiplicando per x l'equazione proposta, si ottiene l'equazione di Eulero $x^2 y''(x) - 5xy'(x) + 8y(x) = x^3$, che, una volta operata la sostituzione $x = e^t$, si può riscrivere nella forma $6\tilde{y}''(t) + 8\tilde{y}'(t) = e^{3t}$. L'equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$; quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da $C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}$. Poiché $\tilde{f}(t) = e^{3t}$ e $\lambda = 3$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza si ottiene $\tilde{y}_p(t) = -e^{3t}$. Pertanto, l'integrale generale è dato da

$$\tilde{y}(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - e^{3t}$$

ovvero

$$y(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2 - x^3.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene che la soluzione cercata è

$$y(x) = x^4 - x^3.$$

6.4. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO 6.16. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) + e^{3x}; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.17. Siano $y_n(t)$ le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -ny^3(t); \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n(1))^2$.

ESERCIZIO 6.18. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - y'(x) = e^{2x}; \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento: Ponendo $z(x) = y'(x)$, l'equazione proposta diventa un'equazione lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata sono $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è $z_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, mentre la soluzione particolare, che si può ricavare con il metodo di somiglianza, è $z_p(x) = \frac{1}{3} e^{2x}$, da cui si ottiene l'integrale generale $z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$. Effettuando, infine, un'integrazione, otteniamo

$$y(x) = \int \left[C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x} \right] dx = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{1}{6} e^{2x} + C_3.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$y(0) = C_1 - C_2 + \frac{1}{6} + C_3 = 0$$

$$y'(0) = z(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$y''(0) = z'(0) = C_1 - C_2 + \frac{2}{3} = 0$$

da cui $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/6$, $C_3 = 1/2$. Pertanto, la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{6} e^{-x} + \frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 6.19. Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' + 4y = 5t + 1$.

ESERCIZIO 6.20. Determinare la soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = f(x) \quad \text{ove} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0; \\ e^x & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti e non omogenea, in cui il termine di non omogeneità non è continuo. Pertanto, non potremo avere una soluzione $y \in C^2(\mathbb{R})$. L'equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 1, -5$. Risolvendo separatamente l'equazione differenziale completa per $x > 0$ ed $x < 0$, poiché $\lambda = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità pari ad 1, il metodo di somiglianza suggerisce di cercare una soluzione particolare della forma $y_p(x) = px e^x$, per $x < 0$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{6} x e^x$, per $x < 0$. Pertanto, l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-5x} & \text{per } x > 0; \\ C_3 e^x + C_4 e^{-5x} + \frac{1}{6} x e^x & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Imponendo le condizioni sui limiti, si ha

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(C_3 e^x + C_4 e^{-5x} + \frac{1}{6} x e^x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} C_4 e^{-5x},$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (C_1 e^x + C_2 e^{-5x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} C_1 e^x,$$

da cui si ricava subito $C_1 = C_4 = 0$. Imponendo, poi, le condizioni di continuità e derivabilità in $x = 0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_2 = C_3 \\ -5C_2 = C_3 + \frac{1}{6} \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_2 = C_3 = -\frac{1}{36}$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{36} e^{-5x} & \text{per } x \geq 0; \\ -\frac{1}{36} e^x + \frac{1}{6} x e^x & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.21. Determinare, al variare del parametro reale α , la soluzione $y_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 8y'(x) - 9y(x) = 0; \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\alpha(x)$ esiste finito.

Svolgimento: Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare a coefficienti costanti omogenea del secondo ordine, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = -1, 9$. Pertanto, l'integrale generale sarà $y_\alpha(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{9x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene

$$y_\alpha(x) = \frac{9-\alpha}{10} e^{-x} + \frac{\alpha+1}{10} e^{9x},$$

che ammette limite finito per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se $\alpha = -1$.

ESERCIZIO 6.22. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y')^2(x); \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento: Osserviamo che, ponendo $y'(x) = z(x)$, l'equazione del secondo ordine proposta (che è non lineare) si trasforma nell'equazione del primo ordine a variabili separabili nell'incognita z , data da $z'(x) = 1 + z^2(x)$, con $z(0) = 0$. Procedendo per separazione di variabili, dopo aver osservato che non ci sono integrali singolari, e tenendo conto della condizione iniziale, otteniamo

$$\int_0^{z(x)} \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = \int_0^x 1 dt$$

da cui

$$\arctan z(x) = x.$$

Tale funzione è ben definita ed invertibile per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. In tale intervallo, possiamo scrivere $y'(x) = z(x) = \tan x$, ovvero

$$y(x) = \int_0^x \tan t dt + 1 = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t} dt + 1 = -\log(\cos x) + 1 \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

ESERCIZIO 6.23. Determinare le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$2y''(x) + 3y'(x) - y(x) = e^x,$$

che soddisfano le condizioni

$$y(0) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty.$$

Stabilire se, fra le soluzioni trovate, ne esiste una che soddisfi l'ulteriore condizione $y'(0) = 0$.

Svolgimento: Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è data da

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Quest'ultima equazione ha come soluzioni $\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$ e $\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} > 0$, pertanto l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{4} e^x,$$

dove si è tenuto conto che $y_p(x) = \frac{1}{4}e^x$ è una soluzione particolare, ottenuta con il metodo di somiglianza. Imponendo le condizioni richieste, si ottiene

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1 - \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} C_1 e^{\lambda_1 x} = +\infty \cdot \text{sign}(C_1) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad C_1 < 0;$$

pertanto, le soluzioni del problema assegnato sono date da

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} - \left(C_1 + \frac{1}{4}\right) e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{4} e^x; \quad C_1 \in (-\infty, 0).$$

Imponendo l'ulteriore condizione $y'(0) = 0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C_1 < 0, \\ C_1 \lambda_1 - \left(C_1 + \frac{1}{4}\right) \lambda_2 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 < 0, \\ C_1 = \frac{1}{4} \frac{(\lambda_2 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{7 - \sqrt{17}}{8\sqrt{17}} > 0, \end{cases}$$

che risulta impossibile. Quindi non esiste nessuna soluzione del problema proposto che soddisfi anche l'ulteriore condizione $y'(x) = 0$.

ESERCIZIO 6.24. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{2y'(x)}{x \log x} + \frac{2\sqrt{y'(x)}}{x \log x} = 0; \\ y(e) = 0; \\ y'(e) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.25. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{2x}{4+x^2} y(x) = \sqrt[5]{x}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.26. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = e^{\frac{1}{2}} \arctan x; \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.27. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{iv}(x) - 2y'''(x) + \alpha y''(x) = e^{-x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Verificare che, per $\alpha > 1$, vi è una sola soluzione y_α tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\alpha(x) = 0.$$

Facoltativo: Stabilire che cosa accade per $\alpha \leq 1$.

Svolgimento: L'equazione può essere abbassata di grado, osservando che y e y' non compaiono esplicitamente. Ponendo $z(x) = y''(x)$, otteniamo $z''(x) - 2z'(x) + \alpha z(x) = e^{-x}$. L'equazione scolare associata è data da $\lambda^2 - 2\lambda + \alpha = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}$, e dipendono, quindi, da α .

Studiamo separatamente i tre casi: a) $\alpha > 1$, b) $\alpha = 1$, c) $\alpha < 1$.

a) se $\alpha > 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{\alpha-1}$ e

$$z_0(x) = K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1} x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1} x).$$

Poiché $f(x) = e^{-x}$ e $\lambda = -1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare dell'equazione non omogenea va cercato nella forma $z_p(x) = p e^{-x} \Rightarrow z'_p(x) = -p e^{-x} \Rightarrow z''_p(x) = p e^{-x}$, da cui, sostituendo nell'equazione,

$$p(1+2+\alpha)e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow p = \frac{1}{\alpha+3}.$$

L'integrale generale è, pertanto,

$$z(x) = y''(x) = K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1} x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1} x) + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x}.$$

Integriamo ora due volte i due membri:

$$y(x) = \int \left\{ \int \left[K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1} x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1} x) + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} \right] dx \right\} dx.$$

Osserviamo che ogni integrale di funzioni della forma $K_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + K_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ è ancora, a meno di costanti, della forma $C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, con C_1, C_2 , in generale, diverse da K_1, K_2 . Invitiamo il lettore a verificare direttamente questa proprietà, ad esempio utilizzando le formule di Eulero; in tal caso, si può riscrivere la funzione integranda nella forma

$$K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1} x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1} x) = H_1 e^{x+i\sqrt{\alpha-1} x} + H_2 e^{x-i\sqrt{\alpha-1} x},$$

e poi integrare due volte quest'ultima espressione, tenendo conto che

$$\int e^{\alpha \pm i\beta} dx = \frac{1}{\alpha \pm i\beta} e^{\alpha \pm i\beta} + C.$$

D'altro canto,

$$\int \left[\int \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} dx \right] dx = \int \left[-\frac{1}{\alpha+3} e^{-x} + C_3 \right] dx = \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} + C_3 x + C_4,$$

quindi, l'integrale generale, per $\alpha > 1$ è dato da

$$y_\alpha(x) = e^x [C_1 \cos(\sqrt{\alpha-1} x) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha-1} x)] + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} + C_3 x + C_4;$$

b) se $\alpha = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e

$$z_0(x) = K_1 e^x + K_2 x e^x.$$

Poiché $f(x) = e^{-x}$ e ancora $\lambda = -1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare dell'equazione non omogenea va cercato nella forma $z_p(x) = pe^{-x}$, da cui, ripetendo i passaggi svolti nel caso a), si ha

$$z_p(x) = \frac{1}{\alpha + 3} \Big|_{\alpha=1} e^{-x} = \frac{1}{4} e^{-x},$$

ovvero

$$z(x) = K_1 e^x + K_2 x e^x + \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$y'(x) = \int z(x) dx = K_1 e^x + K_2(x-1)e^x + C_3 - \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$y(x) = K_1 e^x + K_2(x-2)e^x + C_3 x + C_4 + \frac{1}{4} e^{-x},$$

da cui, rinominando le costanti ($C_1 = K_1 - 2K_2$; $C_2 = K_2$),

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x + C_4 + \frac{1}{4} e^{-x};$$

c) se $\alpha < 1$, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{1-\alpha}$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ e

$$z_0(x) = \begin{cases} K_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + K_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ K_1 e^{2x} + K_2 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

In questo caso, dobbiamo distinguere due casi diversi:

- $\lambda = -1$ è soluzione dell'equazione caratteristica; ciò accade se $\alpha = -3$ (valore per il quale $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$);
- $\lambda = -1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cioè $\alpha \neq -3$.

Per $\alpha < 1$; $\alpha \neq -3$, una soluzione particolare si cerca nella forma $z_p(x) = pe^{-x}$, da cui, come già visto nei precedenti casi,

$$z(x) = \begin{cases} K_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + K_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ K_1 e^{2x} + K_2 + \frac{1}{3} e^{-x} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

e, con conti simili ai precedenti,

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + C_3 x + C_4 + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ C_1 e^{2x} + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + \frac{1}{3} e^{-x} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Per $\alpha = -3$, la soluzione particolare va cercata nella forma

$$\begin{aligned} z_p(x) = p x e^{-x} &\implies z_p'(x) = p(1-x)e^{-x} \implies z_p''(x) = p(x-2)e^{-x} \\ &\implies p[x-2-2(1-x)-3x]e^{-x} = e^{-x} \implies p = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

da cui l'integrale generale

$$z(x) = K_1 e^{3x} + K_2 e^{-x} - \frac{1}{4} x e^{-x};$$

dato che

$$\int \left[\int -\frac{1}{4} x e^{-x} dx \right] dx = \int \frac{1}{4} (x+1) e^{-x} dx + C_3 = -\frac{1}{4} (x+2) e^{-x} + C_3 x + C_4,$$

avremo che, per $\alpha = -3$,

$$y_{-3}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4 - \frac{1}{4} x e^{-x}.$$

Imponendo la condizione al limite e ricordando il comportamento asintotico di polinomi ed esponenziali, avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\alpha(x) = 0 \iff$$

$$\text{a) } y_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} \quad \text{se } \alpha > 1$$

$$\text{b) } y_1(x) = \frac{1}{4} e^{-x} \quad \text{se } \alpha = 1$$

$$\text{c) } y_{-3}(x) = \left[C_2 - \frac{1}{4} x \right] e^{-x} \quad \text{se } \alpha = -3.$$

Il caso $\alpha < 1$; $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq -3$ va ulteriormente diviso in due sottocasi, perché l'esponente $1 - \sqrt{1-\alpha}$ è

- negativo $\iff 1 < \sqrt{1-\alpha} \iff \alpha < 0$;
- positivo $\iff \alpha > 0$.

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} = 0 \iff \begin{cases} \forall C_2 \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha < 0; \alpha \neq -3 \\ C_2 = 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

da cui

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-x} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x}; C_2 \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha < 0; \alpha \neq -3. \end{cases}$$

Ricapitolando,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x}; C_2 \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha < 0; \alpha \neq -3 \\ (C_2 - \frac{1}{4} x) e^{-x}; C_2 \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha = -3. \end{cases}$$

Per $\alpha \geq 0$ si ha una soluzione; per $\alpha < 0$ si hanno infinite soluzioni.

ESERCIZIO 6.28. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 3x - 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.29. Determinare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x; \\ y(0) = 2; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.30. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}e^x.$$

Stabilire quali, tra le soluzioni, soddisfino la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, che ha come soluzione $\lambda = 1$ con molteplicità 2. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea sarà

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Poiché $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ e $\lambda = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 2, il metodo di somiglianza fornisce una soluzione particolare della forma $y_p(x) = px^2 e^x$. Inserendo tale funzione nell'equazione differenziale completa, si ottiene $p = 1/4$, da cui

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{4} x^2 e^x.$$

È immediato verificare che non ci sono soluzioni che soddisfino la condizione richiesta.

ESERCIZIO 6.31. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2e^x + 3e^{-2x}.$$

ESERCIZIO 6.32. Data l'equazione differenziale

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = e^{-x}$$

determinare l'integrale generale e la soluzione del problema di Cauchy relativo alle condizioni

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = 0.$$

ESERCIZIO 6.33. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - \frac{2}{x+2} y''(x) = 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 2/3; \\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.34. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) = 2x\sqrt{y'(x)}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.35. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \frac{4y(x)}{x^2} = \frac{\cos(2 \log x)}{x^2}.$$

Risposte agli esercizi non svolti: 6.4: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^{x^4/2}-1}}$ - 6.5: $y(x) = 1$ - 6.10: $y(x) = \frac{1}{8}(1 + \sin x)^3$ - 6.16: $y(x) = e^{4x} - e^{3x}$ - 6.17: $y_n(t) = \sqrt{\frac{1}{2nt+1}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n(1))^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ - 6.19: $y(t) = Ce^{-4t} + \frac{5}{4}t - \frac{1}{16}$ - 6.24: $y(x) = x - e$ (integrale singolare) - 6.25: $y(x) = \frac{1}{(4+x^2)} \left[\frac{10}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{16}x^{\frac{3}{2}} + 4 \right]$ - 6.26: $y(x) = e^{\frac{1}{2}} \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} \right]$ - 6.28: $y(x) = \frac{7}{32}e^{-4x} + \frac{11}{16}xe^{-4x} + \frac{3}{16}x - \frac{7}{32}$ - 6.29: $y(x) = C_1 e^x + (2-C_1)e^{2x} - xe^x$ - 6.31: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x - 3xe^{-2x}$ - 6.32: l'integrale generale è dato da $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$; la soluzione del problema di Cauchy è data da $6 - 5e^{-x} - 3xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$ - 6.33: $y(x) = \frac{x(x+2)^3}{12}$ - 6.34: $y(x) = 4x$ (integrale singolare) - 6.35: $y(x) = C_1 \cos(2 \log x) + C_2 \sin(2 \log x) + \frac{1}{4} \log x \sin(2 \log x)$ per $x > 0$.