Es 1.1 [Pt. 8] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3^{\sqrt{n}}}{n+2^n}$.

Es 1.2 [Pt. 8] Sia $\sigma_m := \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n$. Calcolare σ_0, σ_1 e σ_2.

Es 1.3 [Pt. 12] Calcolare una primitiva di: (i) $\displaystyle\int e^{-3x^2}\big(x+e^{3x^2+x}\big)dx$; (ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-3}dx$.

Es 1.4 [Pt. 6] si calcoli l'area della regione piana delimitata dall'iperbole $\{y=1/x\}$ e le rette $\{x=-2\}$, $\{x=-6\}$ e $\{y=0\}$.

Es 1.5 [Pt. 8] Sia $L := \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x}dx$. Quale delle seguenti risposte esatta (giustificare):
(a) L'integrale improprio L non converge; (b) $L \in (0,+\infty)$; (c) $L \le 0$.

Es 1.6 [Pt. 8] Risolvere il seguente problema di Cauchy: $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x(2) = 1$.

Es 2.1 [Pt. 12] Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + \operatorname{sen}\frac{x}{n}}{n^x}$.

Es 2.2 [Pt. 12] Calcolare: (i) $\displaystyle\int \frac{x}{\operatorname{senh}^2 x}dx$; (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}dx$.

Es 2.3 [Pt. 12] Si discuta, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza di $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{\operatorname{sen} x^\alpha}dx$.

Es 2.4 [Pt. 14] Si consideri l'equazione differenziale (oscillatore armonico smorzato e forzato):

$$\tfrac{1}{4}\ddot{x} + \dot{x} + x = \operatorname{sen} t, \qquad (*)$$

(i) Si trovi la soluzione generale dell'equazione associata omogenea. (ii) Dire se esistono soluzioni periodiche di $(*)$. (iii) Trovare la soluzione di $(*)$ con dati iniziali $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

Soluzioni

Es 1.1 $a_n := \frac{n^2+3^{\sqrt{n}}}{n+2^n} = \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n}\theta_n$ con $\theta_n \to 1$ (si noti che $n^2/3^{\sqrt{n}} = \exp(2\log n - \sqrt{n}\log 3) \to 0$); quindi $\sqrt[n]{a_n} \to 1/2$ e la serie converge per il criterio della radice.

Es 1.2 $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} x^n = \frac{x^m}{1-x}$ per ogni $|x|<1$; quindi, ponendo $x=-1/2$ si ha $\sigma_0 = 2/3$, $\sigma_1 = -1/3$, $\sigma_2 = 1/6$.

Es 1.3 (i) $\displaystyle\int e^{-3x^2}\big(x+e^{3x^2+x}\big)dx = \int e^{-3x^2}x dx + \int e^x = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + e^x$.
(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-3}dx = \int \big(1+\frac{3}{x^2-3}\big)dx = x + 3\int \frac{1}{x+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{3}}dx = x + \frac{3}{2\sqrt{3}}\int\Big(\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{x+\sqrt{3}}\Big)dx =$
$\displaystyle x + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\Big|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\Big|$.

Es 1.4 La regione descritta è data da $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big| -6 \le x \le -2 \text{ e } -1/x \le y \le 0\}$ e l'area di tale regione è data da $\displaystyle\int_{-5}^{-2}\Big(-\frac{1}{x}\Big)dx = \int_2^6 \frac{1}{x}dx = \log 3$.

Es 1.5 La risposta è (b): $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$ e $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2$ per $\varepsilon \to 0$; inoltre $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x} > 0$ per $0<x<1$ quindi $L \in (0,+\infty)$.

Es 1.6 Per separazione di variabili si ottiene $\displaystyle\int_1^x \frac{dy}{\sqrt{y}}dy = \int_2^t ds$, da cui $\sqrt{x} = t/2$, ossia, $x = t^2/4$.

Es 2.1 Per $x=0$ la serie converge a 0. Per $x \to 0$, $\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{n}}{n^x} \sim x/n^{x+1}$ e la serie $\sum \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{n}}{n^x}$ converge se e solo se $x>0$. Per il criterio della radice la serie $\sum \frac{x^n}{n^x}$ converge assolutamente per $|x|<1$ e diverge in valore assoluto se $|x|>1$. Per $x=\pm 1$ la serie diverge. In conclusione, la serie data converge assolutamente per $0 \le x < 1$ e non converge altrimenti.

Es 2.2 (i) $\int \frac{x}{\operatorname{senh}^2 x}dx = -\int(\operatorname{cotanh} x)' x dx = -x\operatorname{cotanh} x + \int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}dx = -x\operatorname{cotanh} x + \int \frac{1}{\operatorname{senh} x} d\sinh x = -x\operatorname{cotanh} x + \log|\operatorname{senh} x|$.
(ii) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{cotan} x)' dx = -\int (1+\operatorname{cotan}^2 x)\, d\operatorname{cotan} x = -\operatorname{cotan} x - \frac{\operatorname{cotan}^3 x}{3}$.

Es 2.3 Per $x \to 0^+$, $\frac{|\log x|^\alpha}{\operatorname{sen} x^\alpha} \sim \frac{|\log x|^\alpha}{x^\alpha}$ che è integrabile vicino a 0 se e solo se $\alpha < 1$: infatti se $\alpha \ge 1$, $\frac{|\log x|^\alpha}{x^\alpha} \ge \frac{1}{x^\alpha}$ per x vicino a 0, e $\int_0^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha}dx = +\infty$, mentre se $\alpha<1$, per ogni $\alpha<\beta<1$, $\frac{|\log x|^\alpha}{x^\alpha} \le \frac{M}{x^\beta}$ per una opportuna $M>0$ (poiché $\mathrm{x}^{\beta-\alpha}|\log x|^\alpha \to 0$ per $x \to 0^+$) e $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}dx = 1-\beta$.

Es 2.4 (i) La soluzione generale dell'equazione omogena associata è $e^{-2t}(A+Bt)$ (l'equazione caratteristica è data da $\frac{\lambda^2}{4}+\lambda+1=0$ che ha un'unica soluzione $\lambda=-2$).
(ii) Una soluzione periodica è data da $x_{\mathrm{p}}(t) := -\frac{16}{25}\cos t + \frac{12}{25}\operatorname{sen} t$ (si ottiene cercando una soluzione della forma $a\cos t + b\operatorname{sen} t$).
(iii) $x(t) = e^{-2t}\big(\frac{16}{25}+\frac{4}{5}t\big) + x_{\mathrm{p}}(t)$.

Statistiche e commenti:

Es 1.2: La formula della somma della serie geometriche è una della poche formule che va sapute a memoria (è comunque facile da ricavare); solo il 19% ha risposto esattamente.

Es 1.4: il 50% ha dato come risposta (per un'area!) un numero negativo....

Es 1.5: nessuno (!) ha dato la motivazione giusta circa il fatto che L è un numero positivo, motivazione che non può essere data usando il criterio del confronto asintotico (perché??).

Es 1.6: il 30% ha dato due risposte per il problema di Cauchy, che (per equazioni regolari, come in questo caso) ha *sempre una unica soluzione*.

Es 2.1: Il 90% ha sbagliato l'applicazione del criterio della radice (o la valutazione asintotica). Il calcolo giusto è: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n + |\operatorname{sen} x/n|}{n^x}} = \max\{1, |x|\}$.

Es 2.3: Nessuno ha svolto completamente l'esercizio e il 75% ha sbagliato la risposta (eppure, usando, il principio intuitivo che "il logaritmo non conta in presenza di potenze", si ottiene che, per $\alpha > 0$, $|\log x|^\alpha / \operatorname{sen} x^\alpha$ si comporta, per $x \to 0^+$, 'essenzialmente' come $1/x^\alpha$ che è integrabile in $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$, il che è la risposta giusta; poi si trattava di giustificare rigorosamente il risultato).

Es 2.4: è l'esercizio andato meglio in assoluto (il che mi fa piacere, essendo l'oscillatore armonico uno dei modelli più importanti in fisica).