PRIMO ESONERO - Parte 4 – *AM110 – CL Matematica (AA 2021/22 – L. Chierchia). 11/11/2021*

Es 1 [Pt. 10] Dimostrare per induzione che $2^n \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.

Soluzione: Base induttiva ($n = 4$): è verificata con l'uguaglianza. Assumiamo, ora, che $n \geq 4$ e che $2^n \geq n^2$. Osserviamo che per ogni $n \geq 4$ si ha che $n^2 \geq 4n > 2n + 1$ e dunque

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \,.$$

Es 2 [Pt. 10] (i) Sia $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ e siano $A := \{y = f(x) : \ x \neq -2\}$ e $B := \{y = f(n) : \ n \in \mathbb{N}\}$. Discutere sup/inf, max/min di A e B. (ii) f è (strettamente) motonona su $\{x \neq -2\}$? f è invertibile su $\{x \neq -2\}$?

Soluzione: Poiché $\lim\limits_{x\to -2+} f = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = +\infty$, A non è limitato né superiormente, né inferiormente (ossia, $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$).
f è strettamente crescente su $I_1 = (-\infty, -2)$ e su $I_2(-2, +\infty)$ ma non su $\{x \neq -2\}$ (segue o calcolando la derivata o verificando direttamente che $f(x) < f(y)$ sugli intervalli I_k, ma, ad esempio, $f(-3) = 7 > f(0) = -1/2 < f(1/2) = 0$ e quindi f non è monotona su $I_1 \cup I_2$).
$\sup B = 2 = \lim f(n)$ che non è un massimo, essendo $f(n) < 2$ per ogni n e $\inf f = \min f = f(1) = 1/3$ (essendo f strettamente crescente su $\mathbb{N} \subseteq I_2$).
Come già osservato f non è monotona su $\{x \neq -2\}$ ma è invertibile con inversa $x = \frac{1+2y}{2-y}$.

Es 3 [Pt. 20] Sia $f(x) := (x+1)e^{1/x}$. Discutere il comportamento di f sul suo dominio (massimale) di definizione, discutendo, in particolare: asintoti, max/min locali o globali, convessità e punti di flesso. Riportare sinteticamente il risultato dei calcoli e fare uno sketch del grafico.

Soluzione: Il dominio massimale di definizione di f è $A = \{x \neq 0\}$.
limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$.
segno di f: $f(x) < 0$ se $x < -1$; $f(x) > 0$ se $x > -1$ (e $x \neq 0$).
asintoti: $x = 0$ è un asintoto verticale. Ricerca asintoti obliqui: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 2$; dunque $y = x + 2$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.
punti critici, zone di monotonìa: $f'(x) = e^{1/x} \cdot \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2}$, dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = x_\pm$ con $x_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $f' > 0$ su $(-\infty, -x_-) \cup (x_+, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x_- < x < x_+$. Dunque f è strettamente crescente in $(-\infty, x_-)$ e in $(x_+, +\infty)$ mentre è strettamente decrescente in (x_-, x_+); da questo segue che x_- è un punto di massimo locale con $f(x_-) = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) e^{-\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$ e x_+ è un punto di minimo locale con $f(x_+) = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$.
convessità e flessi: $f''(x) = e^{1/x} \cdot \dfrac{3x+1}{x^4}$; dunque $f''(x) < 0$ per $x < -1/3$ e $f'' > 0$ per $x > -1/3$: f è strettamente concava in $(-\infty, -1/3)$, strettamente convessa in $(-1/3, +\infty)\backslash\{0\}$ e $x_0 = -1/3$ è un punto di flesso.
sketch del grafico: (si noti che $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 0$)