REGOLE DI DERIVAZIONE

Se f e g sono derivabili in x_0 $\Rightarrow$

① $(af+bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$ $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$

(segue immediatamente dall'A.d.L.)

② fg è derivabile $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(Regola di Leibniz)

③ $(f \circ g)'(x_0) = f' \circ g(x_0) \cdot g'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$, $y_0 = g(x_0)$

↑ composizione

(stiamo assumendo che g è derivabile in x_0, f è derivabile in $y_0 = g(x_0)$)

Cenno di dimostrazione

$$\frac{f\circ g(x_0+h) - f\circ g(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \frac{f(g(x_0+h)) - f(y_0)}{g(x_0+h) - y_0} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} g'(x_0)$

$y = g(x_0+h)$

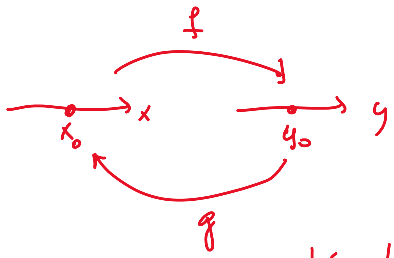
$h \to 0 \Rightarrow y \to y_0$

$$\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \to f'(y_0)$$

④ Derivazione delle funzioni inverse

... $f(x)$ ... invertibile con inversa $g(y) = f^{-1}(y)$

$x \to f(x) = y$ ...



derivando e usando ③

$$g \circ f(x) = x \implies g' \circ f \cdot f' = 1$$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{dove } x = g(y)$$

$$y = f(x) \iff g(y) = x.$$

$$f'(x) \neq 0$$

[GE] Cap 6   Trovare dove sono derivabili le seguenti funzioni e calcolarne la derivata.

1. $x\sqrt{|x|}$ dominio è $\mathbb{R}$.

Studiamo prima la derivabilità di $\sqrt{x}$, $x \geq 0$

x^α, $x > 0$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} = f \circ g(x) = f(g(x))$$

dove $g(x) = \alpha \log x$ $f(y) = e^y$

Se voglio calcolare $e^{\alpha \log x}$

$$x \xrightarrow{\log} \log x \xrightarrow{\cdot\alpha} \alpha \log x \xrightarrow{e^y} e^{\alpha \log x}$$

($\alpha \log x = y$)

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad g'(x) = \alpha \frac{1}{\ }$$

$$= e^{\alpha \lg x} \quad \alpha \frac{1}{x} \qquad f'(y) = e^y$$

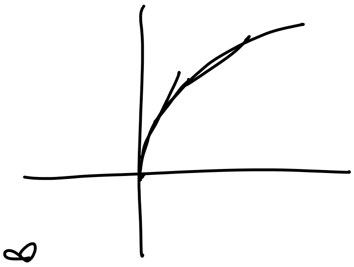
$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x>0$$

$n \in \mathbb{Z}$ $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1}, \quad x \neq 0$

$n \in \mathbb{N}_0$ $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1} \quad x \in \mathbb{R}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x>0$$



$\sqrt{x}$ non è derivabile in $x=0$

$$(D_+ \sqrt{x})(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Se $x \neq 0$ $\quad x\sqrt{|x|}$ è derivabile e

se $x>0$, $\quad (x\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

altrimenti $\quad (x\sqrt{x})' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$x<0$ $\quad (x\sqrt{-x})' = -((-x)\sqrt{-x})' = -((-x)^{3/2})'$

$$= -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}(-1) = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$$

$x \neq 0$ $\quad (x\sqrt{|x|})' = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$

$$(f(-x))' = (f \circ g)'(x) \qquad g(x) = -x$$

$$g'(x) = -1$$

$= f'(g(x)) \cdot (-1) = -f'(-x)$

Attenzione: non confondere $f'(-x)$ con $(f(-x))'(x)$

$f'(-x)$: fai la derivata di f e calcola in $(-x)$

$(f(-x))'(x)$: fai la derivata di $f((-x))$ e poi calcola in x

Derivata in $x=0$:

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{h|h|^{\frac{1}{2}}}{h} \to 0 \quad \text{quindi}$$

$$\boxed{(x\sqrt{|x|})'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}}$$

Es 2. $f(x) = x + |x|$

$f'(x) = 2$ se $x > 0$

$f'(x) = 0$ se $x < 0$

e in 0 non è derivabile: $h > 0$ $\frac{f(h)}{h} = 2$

$h < 0$ $\frac{f(h)}{h} = 0$

$D_- f \neq D_+ f$

Esercizi standard

Es. 12 $\quad \frac{x^2-1}{x(x+2)}$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f g'}{g^2}}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x(x+2)}\right)' = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \checkmark$$

$(x^2+2x)' = 2x+2$

$\left(\frac{1}{g}\right)'$

$\frac{1}{g}\, g = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' \cdot g + \frac{1}{g}\, g' = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{g'} = -\frac{g'}{}$ ←

g' $g2$

$$= \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2}{x^2(x+2)^2} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2(x+2)^2}$$

ES. 17 $\log_x 2x = \log_x 2 + \log_x x$ $\quad$ $\log_a b \; \log_b x = \log_a x$

$x>0,\ x\neq 1$ $\quad = \log_x 2 + 1$ $\quad$ $\log_x 2 \; \log_2 x = 1$ $\quad$ $a=x,\ b=2$

$= \frac{1}{\log_2 x} + 1$

$$(\log_x 2x)' = \left(\frac{1}{\log_2 x}\right)' = -\frac{(\log_2 x)'}{(\log_2 x)^2} = -\frac{\log_2 e}{x \cdot (\log_2 x)^2}$$

$$= -\frac{\log_2 e}{x(\log x \, \log_2 e)^2}$$

$\log_2 x = \log_2 e \cdot \log x$

$$= -\frac{1}{x(\log x)^2 \log_2 e} = -\frac{\log 2}{x(\log x)^2}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$D(a^x) = D(e^{x \log a}) = a^x \cdot \log a$$

$f \circ g$ con $f(y) = e^y$, $g(x) = \log a \; x$

$g' = \log a.$

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ES. $D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (per casa)

$D(f(-x)) = -f'(-x)$

$D(e^{-x}) = -e^{-x}$

Es $D \sinh x = D \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$D \cosh x = D \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$D f^{-1}(x) = \frac{1}{\ldots}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (Df)(f^{-1}(x))$, $\uparrow$ y

$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$\cos y = ?$ in termini di x $\qquad \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

NB $\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \Leftrightarrow f$ è strett. crescente.

Teorema. Sia f derivabile su $[a,b]$. Allora:

(i) f è crescente $\Leftrightarrow f' \geq 0$

(ii) f è decrescente $\Leftrightarrow f' \leq 0$

(iii) $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ è strett. crescente

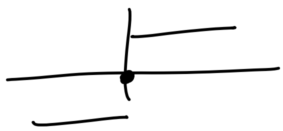
(iv) $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ è strett. decrescente

Es (!) calcola $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ e $(\arccos x)'$

Es 26 $\quad f \quad x^2\, sgn(x)$ $\qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 & se\ x>0 \\ 0 & se\ x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

per $x>0$ $\quad f' = 2x$

per $x<0$ $\quad f' = -2x$



$D_+ f = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$, $\quad D_- f = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-h^2)}{h} = 0.$

$f' = 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Es 54 cap 2 $\quad$ calcolare sup / inf di $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\} \supseteq \mathbb{Z}$

sup A = +∞ , inf A = −∞

ES 51 $A = \{ x = n^3 - 10n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\lim_{n \to +\infty} n^3 - 10n = +\infty \Rightarrow$ A non è limitato sup.

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ sup A = +∞

$n^3 - 10n = n(n^2 - 10) = $

$n(n^2-10)$	n
−9	1
−12	2
−3	3
>0	n ≥ 4

inf A = min A = −12