

SERIE NUMERICHE AL VARIARE DEL PARAMETRO

DIRE PER QUALI $x \in \mathbb{R}$ CONVERGONO LE SERIE SEGUENTI

(23) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n}$

(24) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^n}$

(28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^{2n+1}$

(29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n x^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ \cancel{\neq} & x \leq -1 \end{cases}$$

(23) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n}$

$1+x^n > 0$
 $x \neq 0$
 n pari sempre
 n dispari: $x > -1$

$x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n} = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ \sqrt{2} & x = 1 \\ \infty & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$x > 1$
 $x = 1$
 $-1 < x < 1$

STUDIO

$x > 1$

$\frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n} > 0$

CRITERIO RAPPORTO

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$
 $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^{n+1}}}{x^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^{n+1} \left(\frac{1}{x^{n+1}} + 1 \right)}{x^n \left(\frac{1}{x^n} + 1 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \quad \text{converge}$$

RICORDO

Data una successione a_n se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dots$

28
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^{2n+1}$$

$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ conv. abs. $\Rightarrow$ conv.

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ diverge

$x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ div. con i
val
assoluti

$$|a_n| = \left| \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^{2n+1} \right| = \left| \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} \right| |x|^{2n+1} = \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} |x|^{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[n]{3^n + 4^n}} |x|^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{3}{4} |x|^2 = \frac{3}{4} x^2$$

o.b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$

se $\frac{3}{4} x^2 < 1$

converge
assolut.

$\frac{3}{4} x^2 = 1$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

diverge
 $\frac{3}{4} x^2 > 1$

SE $|x| > \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sum a_n$
NON
CONVERGE

$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $|x| < \frac{2}{\sqrt{3}}$

STUDIO $x^2 = \frac{4}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} (x^2)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} \cdot \frac{4^n}{3^n}$$

LA SERIE NON CONV. PERCHÉ NON È
SODD. LA COND. NECESS. SE $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$
DIV. A $+\infty$ SE $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ DIV. A $-\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+n x^2} = \begin{cases} +\infty & x = \pm 1 \\ 0 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+n x^2}} = |x| < 1 \quad \text{CONV. ASSOLUTA M.} \Rightarrow \text{CONVERGENTE}$$

SE $|x| > 1$ NON CONV. PERCHÉ NON È SODDISFATTA LA COND. NECESSARIA

SE $|x| = 1$

$x = 1$

$x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$$

DIV. PER

CONFRONTO ASINTOTICO

CON SERIE
ARMONICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$$

CRITERIO DI LEIBNITZ

$$\sum (-1)^n a_n$$

$$a_n = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0$$

LA SERIE CONVERGE.

LA SERIE CONVERGE $-1 \leq x < 1$

CONDIZIONE NECESSARIA PER CONV. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$

CRITERI DI CONVERG. SU $|a_n|$

SE CONV. $\sum |a_n| \Rightarrow \sum a_n$ CONV.

SE $\sum |a_n|$ DIV.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < +\infty$$

PER LEIBNITZ

SE SCOPRO CHE DIVERGE ASS.

CON IL CRIT. DELLA RADICE O DEL RAPP
ALLORA SO CHE LA SERIE NON CONVERGE

INFATTI SE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow$

$$|a_{n+1}| > |a_n| \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$$

QUINDI $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ NON CONVERGE