

PRINCIPIO D'INDUZIONE

$P(n)$ proprietà su $n \in \mathbb{N}$

Voglio far vedere $P(n)$ sia vera $\forall n \in \mathbb{N}$

①. mostro $P(1)$ sia vera

②. suppongo che $P(\bar{n})$ sia vera per $\bar{n}$
e mostro che $P(\bar{n}+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

ES1 DIMOSTRO $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Scrivere $\sum_{k=1}^n k = \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\text{...}}$

① $P(1)$ è vera

DEVO FAR VEDERE $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ È VERA

IP. INDUTTIVA $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

DEVO FAR VEDERE $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n 2^k = \underbrace{2^{n+1} - 1}_{\text{⊕}}$$

DIMOSTRA PER
INDUZIONE

$$P(0) \quad \sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1 \quad 2^1 - 1 = 1 \quad P(0) \text{ È VERA}$$

$$P(1) \quad \sum_{k=0}^1 2^k = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 \quad \text{⊕} \quad 2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$k=0$$

$$\text{IP} \quad \sum_{k=0}^n 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{4}$$

$$\text{TH} \quad \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n}_{2^{n+1} - 1} + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$a+a=2a$$

$$\text{QUINDI} \quad \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{Sia } a \neq 1 \quad \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

P(0)

$$\sum_{k=0}^0 a^k = a^0 = 1$$

$$\frac{1-a}{1-a} = 1 \quad \text{VERA}$$

$$\text{IP.} \quad \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{TH.} \quad \sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1-a}$$

$$\underbrace{a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n}_{\sum_{k=0}^n a^k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^k$$

$$\sum_{k=0}^{n+3} \frac{k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{k+1} + \dots ?$$

AGGIUNGETE I

TERMINI

MANCANTI

$$\sum_{k=n+2}^{n+3} \frac{k}{k+1} = \frac{n+2}{n+2+1} + \frac{n+3}{n+3+1}$$

MOSTRARE CHE $n^2 + n$ è pari $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(1)$ $1+1=2$ è pari

ip $n^2 + n = 2h$ $h \in \mathbb{N}$ TH $(n+1)^2 + n+1$ è multiplo di 2

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + n+1 &= n^2 + 1 + 2n + n+1 = n^2 + n + 2n + 2 \\ &= 2h + 2n + 2 = \\ &= 2(h+n+1)\end{aligned}$$

è pari

VERIFICATO

$$n^2 + n = n(n+1)$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

se $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$P(1)$ $(1+x)^1 = 1+x$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

IP INDUTTIVA

TH

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

$$1+nx+x$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+\underline{nx^2} \geq \\ &1+nx+x\end{aligned}$$