Lezione 1

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/AM110_21_22.htm

Proprietà assiomatiche dei numeri reali:

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assiomi-addizione.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assiomi%20prodotto.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assiomi%20ordine.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assioma%20somma-prodotto.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assioma%20somma-ordine.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assioma%20prodotto-ordine.pdf

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assioma%20di%20completezza.pdf

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM110_21_22/Assiomi%20completi.pdf

$$A = \{x \geq 0 \mid x^2 < 2\}$$

tali che

$$x < y \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} x \leq y \\ x \neq y \end{cases}$$

$$B = \{x \geq 0 \mid x^2 > 2\}$$

$x \in A \quad y \in B, \quad x^2 < 2 < y^2$

$\Downarrow$ siccome so che $x, y \geq 0$

$$x < y \Rightarrow x \leq y$$

(In generale se $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \underline{\text{non}} \quad x$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3| \quad)$$

Per l'assioma (D) $\exists$ s che separa A e B

ossia $\quad x \leq s \leq y \quad \forall\, x \in A, \ \forall\, y \in B$

$$s =: \sqrt{2}$$

Da esercizi preliminari del sito di Tor Vergata dove il testo è scrivere gli insiemi dati come unione di INTERVALLI

Def di Intervallo.

$$\left.\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}\right\} \quad a, b \in \mathbb{R} \ (a < b)$$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad a, b \in \mathbb{R} \ (a \leq b)$$

$$\{a\} = [a,a]$$

INTERVALLI LIMITATI.

INTERVALLI ILLIMITATI:

$[a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$

$(a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$.

$(-\infty, b] = \{ x \leq b \}$

$(-\infty, b) = \{ x < b \}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

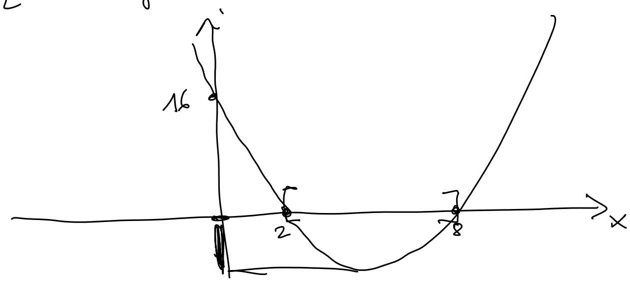
ES (1) (Precorsi Tor Vergata)

$A = \{ x \mid \underbrace{x^2 - 10x + 16} \leq 0 \}$

$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 10x + 16$

$= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 8 \qquad y = x^2 - 10x + 6$



$A = [2, 8]$

Lezione 2

mercoledì 22 settembre 2021 08:06

Es (8) (Preliminari T.V.)

$$A = \{ x \mid \sqrt{x^2-1} > x+3 \}$$

IN GENERALE

RADICI ENNESIME

$a \geq 0, n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ b t.c.

$$b^n = a$$

tale b è denotato con

$$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$$

radice n-esima di a.

"DEF" ($n=2$) (Teorema) $\forall\ a \geq 0,\ a \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $\underline{b \geq 0}$ | $b^2 = a$

ESISTE UNICO

e tale numero reale b si denota $\sqrt{a}$ ($\sqrt{a} := b$)

$\sqrt{2}$ è l'unico numero strettamente positivo t.c. $(\sqrt{2})^2 = 2$

Innanzitutto dobbiamo avere

$$x^2 - 1 \geq 0 \iff \underline{\underline{x^2 \geq 1}} \iff \sqrt{x^2} \geq 1$$

Proposizione 1

Siano $a, b \geq 0$. Allora

$$a \geq b \iff a^2 \geq b^2$$
$$a > b \iff a^2 > b^2$$
$$a > b \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

IMPLICA

$\Rightarrow$ Implicazione logica:

$P \Rightarrow Q$ $\overset{def}{\iff}$ se P è vera, allora è vera Q

(se P, allora Q) (P, Q proposizioni)

$P \iff Q$ $\overset{def}{\iff}$ P è vera se e solo se Q è vera

se e solo se

Nota: in generale non è vero che se $a, b \in \mathbb{R}$

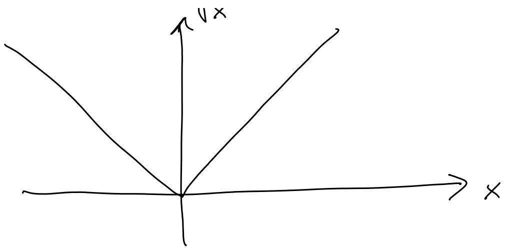
$a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ infatti se $a = 2$, $b = -3$

$2 > -3$ ma $2^2 = 4 < (-3)^2 = 9$

DEF DI MODULO O VALORE ASSOLUTO DI x

$$\boxed{|x| := \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$$

$(-x > 0)$



$\{x \mid |x| \geq 1\} \supseteq A$ $\qquad |x| \geq 1$

$(*)\ \sqrt{x^2-1} > x+3$

Due casi (i) $x+3 < 0$, (ii) $x+3 \geq 0$

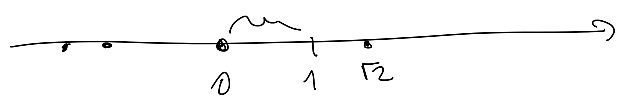
Caso (i) $x+3<0$ ossia $x < -3$, $(*)$ è verificata (se $|x|\geq 1$)

$x < -3$, ok $\qquad (-\infty,-3) \subseteq A$

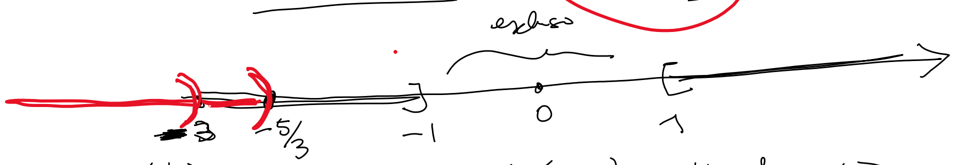
Caso (ii) $x+3 \geq 0$ $\quad$ Per la Proposizione 1

$\cancel{x^2}-1 > (x+3)^2 = \cancel{x^2}+6x+9$

$6x+10<0$ $\qquad$ ($x>y$ e $a>0 \Rightarrow ax>ay$) ✓



$3x+5<0$ $\qquad x < -\frac{5}{3}$



$|x| \geq 1 \iff x \leq -1$ oppure $x \geq 1$

$A = (-\infty, -5/3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{3}\}$

Es 11 (Prd. T.V.)

$A = \{ y = |x-1| + 2|x| \mid x \in [-4,2] \}$

$f : x \in \underbrace{[-4,2]}_{\text{Dominio di } f} \longmapsto f(x) = |x-1|+2|x|$

$$A = f([-4,2]) := \text{l'immagine di } f = \text{im}(f)$$

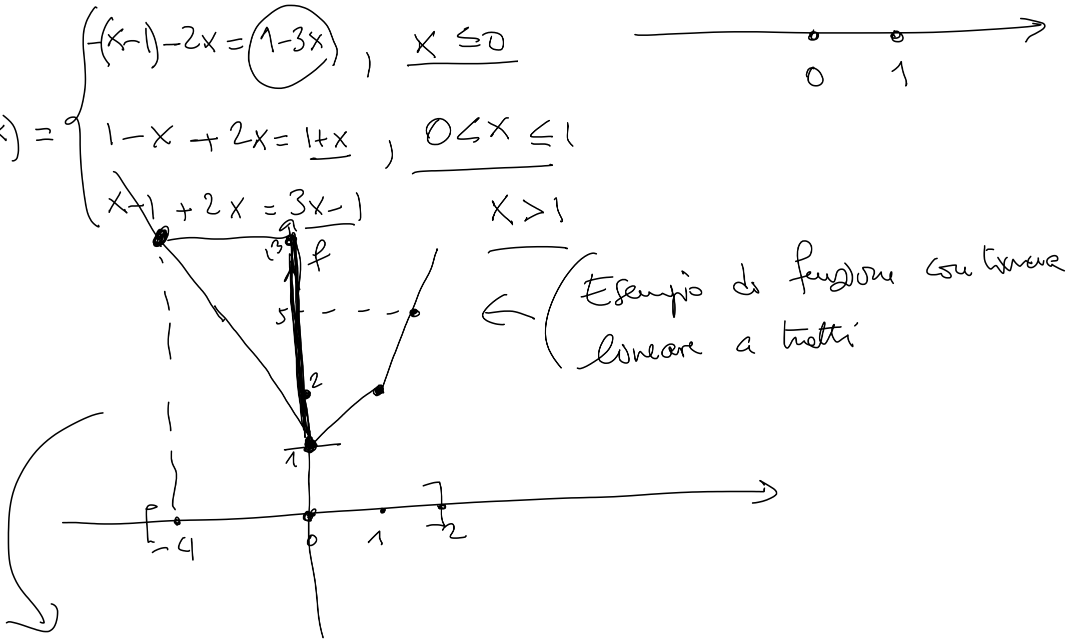
DEF.
In generale $f : E \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

E: DOMINIO DI f; $\mathbb{R}$: CODOMINIO

$$\text{im}(f) = \{ y \mid \exists x \in E \text{ con } y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in E \}$$

$$f(x) = |x-1| + 2|x| \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) - 2x = 1-3x, & x \le 0 \\ 1-x+2x = 1+x, & 0 < x \le 1 \\ x-1+2x = 3x-1 & x > 1 \end{cases}$$



(Esempio di funzione continua lineare a tratti)

$$A = f([-4,2]) = [1, 13]$$

ES. (15) (Prel. T.V.)

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3^x > \tfrac{1}{27} \}$$

Funzioni esponenziali Sia $a > 0$, $a \neq 1$ BASE DELL'ESPONENZIALE

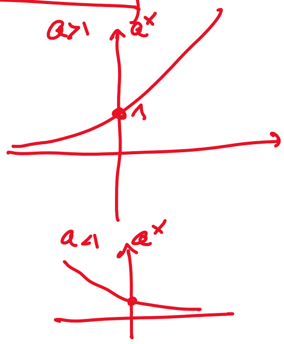
$x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$

Proprietà

(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{x+y} = a^x a^y$ (*) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ (iv) $a>1, x>0 \quad a^x>1$
$a>1 \quad x \to a^x$ è strett. crescente



(i), (ii) $\Rightarrow$ $a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$

$$a^x \cdot (a^{-x}) \overset{(ii)}{=} a^{x+(-x)} = a^0 \overset{(i)}{=} 1$$

$\Rightarrow$ $(a^{-x}) = \frac{1}{a^x}$

$$\left(a^x \overset{DEF}{:=} \lim_{\substack{r\to x \\ r\in\mathbb{Q}}} a^r \right)$$

$a^r := (a^{\frac{1}{q}})^p$.

$r := \frac{p}{q}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$

def. di $r\in\mathbb{Q}$ $\quad \frac{p}{q} := p\cdot q^{-1}$

$3^x > \frac{1}{27}$, $\quad 27\cdot 3^x > 1$

$\parallel$

$3^3\cdot 3^x > 1$

$\parallel$

$3^{3+x} > 1$

$\Updownarrow$

$3+x>0$ $\quad$ ovvero $x > -3$

$\left(3^x > \frac{1}{26} \quad 26\cdot 3^x > 1 \quad 3^{\log_3 26}\cdot 3^x \right)$

$$A = \{x \mid x>-3\} = (-3,+\infty)$$

LOGARITMI

$a>0$, $a\neq 1$ $\quad$ a base del logaritmo

$\log_a y$ è la funzione inversa di $\boxed{y=a^x}$

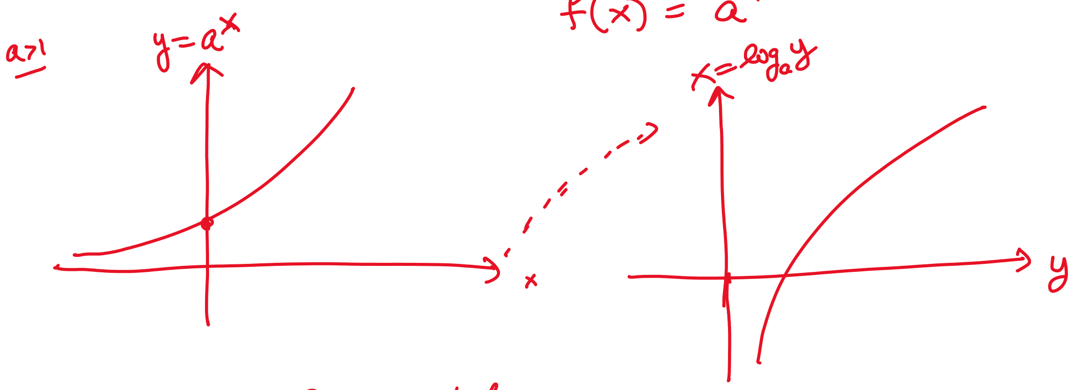
Teor. Dato $y>0$ $\exists!\, x>0 \mid a^x = y$

tale $x := \boxed{\log_a y}$ $\qquad$ la funzione inversa.

$$\boxed{a^{\log_a y} = y}$$

$$f \circ f^{-1} = id$$

$$f(x) = a^x$$



Proprietà fondamentali:

(i) $\log_a 1 = 0$ $\quad (a^0 = 1)$

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\quad x,y>0$

(iii) $\log_a x^y = y \log_a x$ $\quad x,y>0$

(iv) $a>1$ $\quad \log_a x$ è strett. crescente

(v) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ $\quad (\forall a,b>0 \quad a,b\neq 1$, $\forall x>0)$

La (ii) segue dalla proprietà (ii) degli esponenziali:

$$xy = a^{\log_a xy}, \qquad a^{(\log_a x + \log_a y)} \overset{\text{esp}}{\underset{(ii)}{=}} a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \overset{\text{def}}{=} x \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad a^{\boxed{\log_a xy}} = a^{\boxed{\log_a x + \log_a y}}$$

$$\Rightarrow \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a^{\log_a x} \\ a^{\log_a b \cdot \log_b x} &= \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} \\ &= b^{\log_b x} = x \end{aligned}}$$

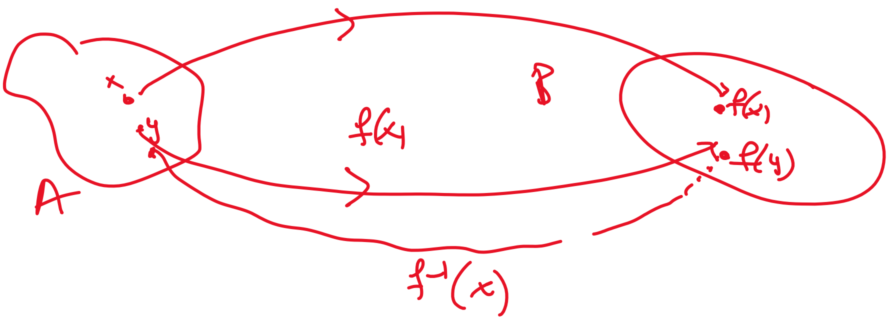
Base $a>0$, $a\neq 1$ $\left(\log x := \log_e x\right.$ ↑ base e numero di Eulero$\left.\right)$

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

Teor. Dato $x>0$ $\exists!$ $y\in\mathbb{R}$ $\mid$ $a^y = x$, $y := \log_a x$

Ossia $x \mapsto \log_a x$ è la funzione INVERSA di $y \to a^y$

$f: A \to B$ iniettiva o 1-1 $\left(x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y)\right)$



$$\underbrace{f^{-1}(f(x))} = x$$

$$\boxed{f^{-1}\circ f = id}$$

$id(x) = x$ funzione identità

Def f è strettamente crescente se

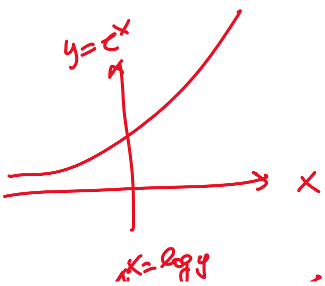
$\forall$ $x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$

nel dominio di f

(in altri termini f strettam crescente conserva l'ordine)

Esempi

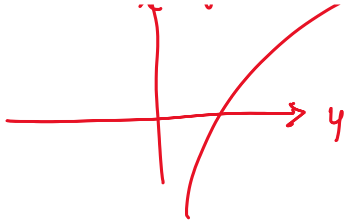
1. $x \to e^x$ $\quad x\in\mathbb{R}$



$\left(a^x,\ a>1\right)$

2. $y \to \log y$ $\quad \uparrow$ $\log_e y)$

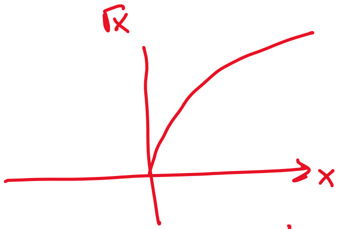
$\underline{\underline{y>0}}$



$(\log_a y \ , a>1)$

3. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$x \geq 0$

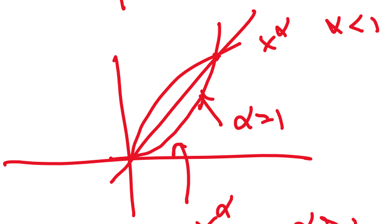


4. x^{α}

$x \geq 0$

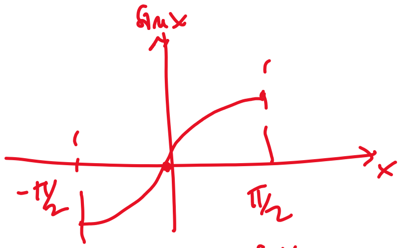
$\underline{\alpha > 0}$

potenze (generalizzate)



x^{α} $\quad \alpha > 1$.

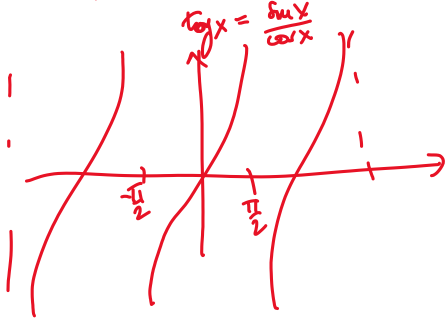
5.



sin: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

è strett. crescente

6



dominio è $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Torniamo ai logaritmi:

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a x^y = y \log_a x \qquad x>0, \ y \in \mathbb{R}$

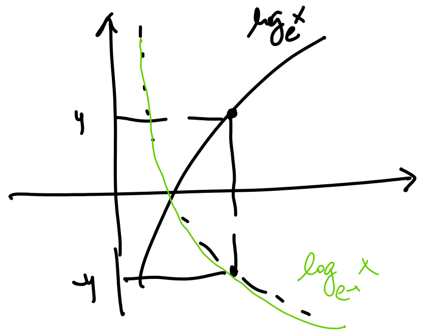
Cambio di base $\boxed{\log_a b \, \log_b x = \log_a x}$, $\left(\begin{matrix} a,b>0, \ a,b \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right)$

(Verifica $\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"def"}}}{x = a^{\log_a x}} \overset{?}{=} a^{\log_a b \, \log_b x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà degli esponenziali}}}{=} \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} \overset{\text{def}}{=} b^{\log_b x} \overset{\text{def.}}{=} x$ $\quad$ $\underline{\text{OK!}}$)

$\left(\ (a^x)^y = a^{xy} \ \right)$

(*) $\log_a x = -\log_{a^{-1}} x$

segue da (1) con $b = a^{-1}$ $\quad \log_a b = \log_a a^{-1} = -1 \log_a a = -1$



Es. IV $\quad$ Es 1 - (25)

$$A = \{ y = 2^x \mid \log_{11}(x+5) + \log_{11}(x-2) < \log_{11}(3x-1) \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{vale} \ \ldots \}$$

1. Dominio di def. delle funzioni coinvolte

Devo avere

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-2>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-5 \\ x>2 \\ x>\frac{1}{3} \end{cases}$$

$x>y \Rightarrow 0>y-x$

$-x<-y \quad \Leftarrow \quad -y>-x$

$(ax>ay$ se $x>y$, $a>0)$

Quindi $\boxed{x>2}$

$$\underbrace{\log_{11}(x+5)(x-2)} < \underbrace{\log_{11}(3x-1)}$$

$\iff (x+5)(x-2) < 3x-1$

$y \mapsto \log_{11} y$ è strett. crescente $\quad (f(x)>f(y) \iff x>y)$

$\iff x^2+\cancel{3x}-10 < \cancel{3x}-1$

$$|x|<3 \iff -3<x<3$$

$$\iff x^2 < 9$$

$$\iff |x| < 3$$

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ -x & \text{se } x \le 0 \end{cases}}$$

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}$

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

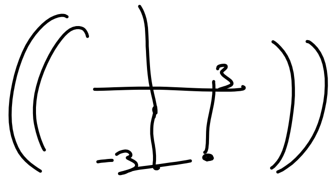
$$|xy| = |x|\,|y|$$

$$|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|$$

$(-3,3) = \{\,|x|<3\,\}$

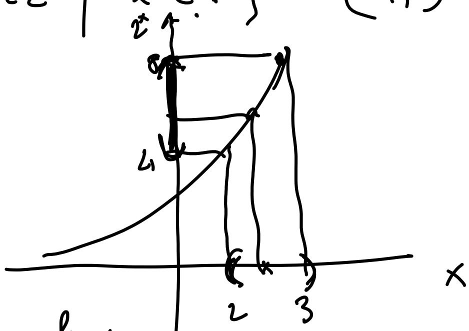
Def

$$\{x \mid -3 < x < 3\}$$



$$B = (-3,3) \cap (2,+\infty) = (2,3) = \{x \mid 2 < x < 3\}$$

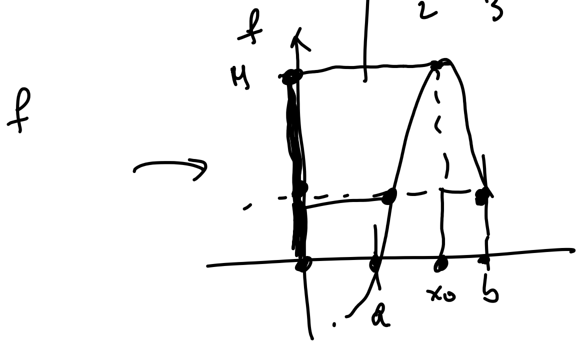
$$A = \{y = 2^x \mid x \in B\} = (4,8)$$



Ho usato 2 cose

$x \to 2^x$ è strett. crescente

e continua



$$f((a,b)) = \{f(x) \mid x \in (a,b)\} = (0,M]$$

$a < x$

MEDITARE SU QUESTO ESEMPIO

[GE] (Giusti Esercizi e complementi)

Cap 2 Es. 24.

$$2^{(1+x^2)} \log_{10}(1+x^2) < 2^{10}$$

cambio di variabile !!

$y := 1+x^2$

$$\boxed{2^{y} \log_{10} y < 2^{10}}$$

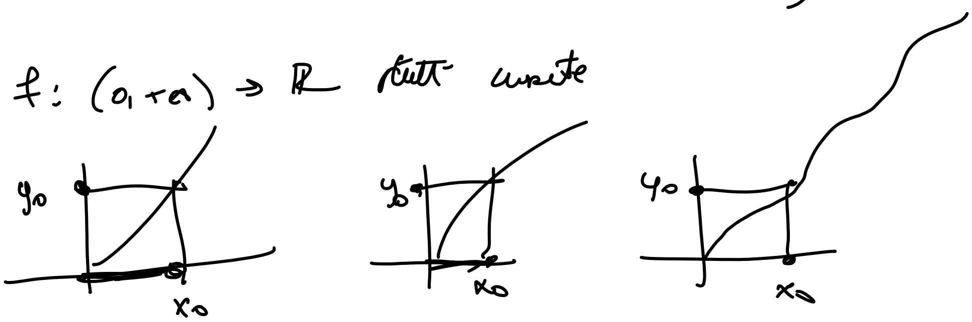
$2^{y_0} \log_{10} y_0 = 2^{10} \iff y_0 = 10$!/

$y \to 2^{y} \log_{10} y$ è strett. crescente

$y>0$

(essendo il prodotto di due funzioni strett. crescenti)

Data $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ strett. crescente



$f(x) < y_0 \iff 0 < x < x_0$

$$\boxed{y \in (0,10)}$$

$y = 1+x^2$

$0 < 1+x^2 < 10$

$x^2 < 9$

!

$|x| < 3$

Risposta $\boxed{x = (-3,3)}$

$x \mapsto x^{\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$ potenze generalizzate

se $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto a^{x}$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad a > 0$ $\quad a \neq 1$ funzioni esponenziali

base

$\log_a x$, $x > 0$

funzione inversa di a^x $\qquad \log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$

Oss il prodotto di due funzioni crescenti e positive è crescente

$$f(x)\,g(x) < f(x)\,g(y) < f(y)\,g(y)$$

$x < y$

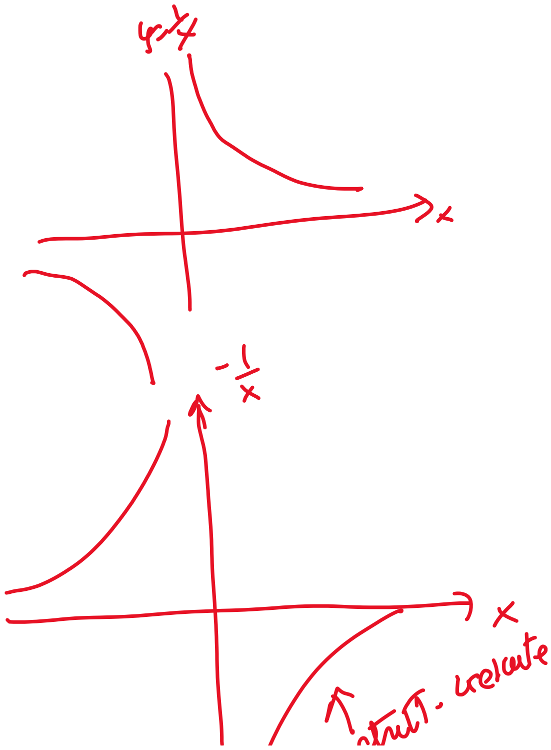
L'ipotesi di positività è, in generale, necessaria

Esempio.

$f(x) = x^2$, $g(x) = -\frac{1}{x}$

$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -x$

strett. decrescente



Es 8 Cap 2 [GE]

Dimostrare che $\forall \; x,y \geq 0$ risulta

$$(*) \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

$\boxed{|x| = |-x|}$

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y-x|}$$

Posso assumere che $x \geq y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{y}$

$$0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \overset{?}{\leq} \sqrt{x-y}$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{x} + y - 2\sqrt{xy} \leq \cancel{x} - y$$

$$\Longleftrightarrow y \leq \sqrt{xy}$$

$$\Longleftrightarrow y^2 \leq xy \qquad \text{se } y=0 \text{ la disug è vera} \checkmark$$

$$\overset{y>0}{\Longleftrightarrow} y \leq x \checkmark \qquad \text{fatto!}$$

RICEVIMENTO (PROF. L.C.) 17-19 Mercoledì (mio studio)

T.V Es 1, (12)

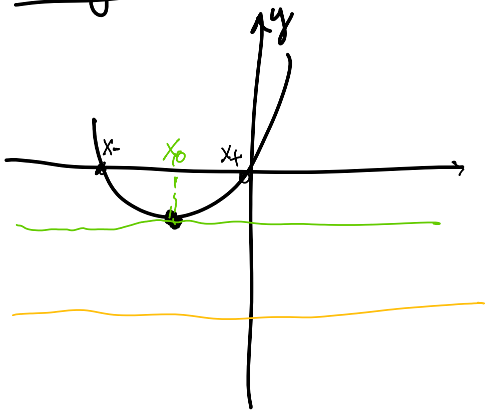
$$A = \{ \underbrace{x^2 - 5x + 6}_{} \;:\; x^2 - 5x + 4 < 0 \}$$

tale che

$$\{ \ldots \;|\; \ldots \text{ verifica } x^2 - 5x + 4 < 0 \}$$

$= \{ y = x^2 - 5x + 6 \mid$ x ...

Svolgimento. Sia $E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 < 0 \}$



$y < 0 \iff \begin{cases} x_- < x < x_+ \\ \emptyset \\ \emptyset \end{cases}$

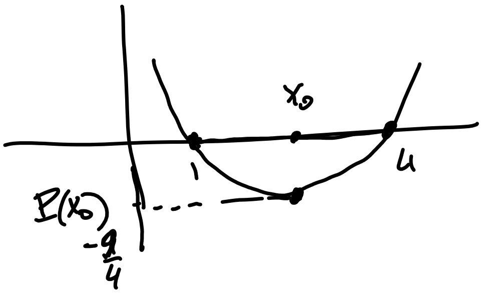
$= (x-1)(x-4)$

$x_- = 1 \quad x_+ = 4$

$1 < x < 4$

$E = (1, 4)$

$y = P(x) + 2 \qquad P(x) = x^2 - 5x + 4$



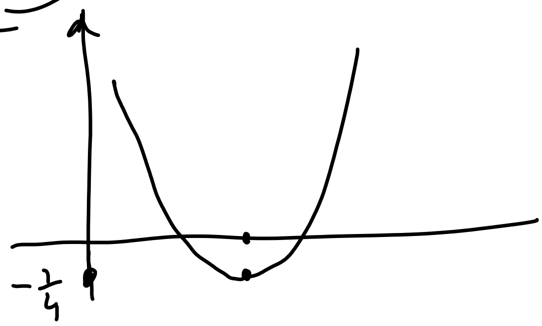
$x_0 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$

punto di mezzo tra x_- e x_+

$P(x_0) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4$

$= -\frac{25}{4} + 4 = -\frac{9}{4}$

$P+2$



$2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

A $\left[-\frac{1}{4}, 2 \right)$

$P(x) = \underline{x^2} - 5\underline{x} + 4 = x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + 4 =$

COMPLETAMENTO DEL QUADRATO:

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 4 - \frac{25}{4}$$

Quindi

$$P(x) = \underbrace{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}_{} - \frac{9}{4}$$

$\Rightarrow$ il valore minimo di $P(x)$

è $P\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

Radici $\quad P(x) = 0 \iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

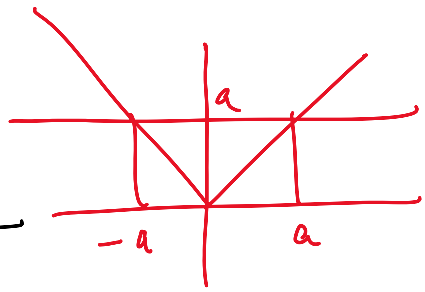
$$\iff \left| x - \frac{5}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} - x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$|x| = a \qquad a > 0$

$\iff \begin{cases} x = a \\ \text{oppure} \\ x = -a \end{cases}$



CASO GENERALE

$P(x) = a x^2 + b x + c \qquad a \neq 0$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \cdots \frac{\cdots}{2a} \cdots a \right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

ho aggiunto e tolto $\frac{b^2}{4a^2}$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$:= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

con $\Delta := b^2 - 4ac$ = discriminante della parabola

RADICI $\quad P(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

- Nessuna soluzione $\quad \Delta < 0$
- $x = -\frac{b}{2a}$ $\quad \Delta = 0$
- $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad \Delta > 0$ $\quad (\sqrt{\Delta} > 0)$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $a > 0$, P ha un minimo assoluto in $x_0 = -\frac{b}{2a}$

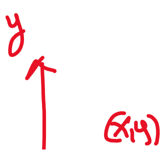
e $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$

Se $a < 0$, P ha un massimo assoluto in ....

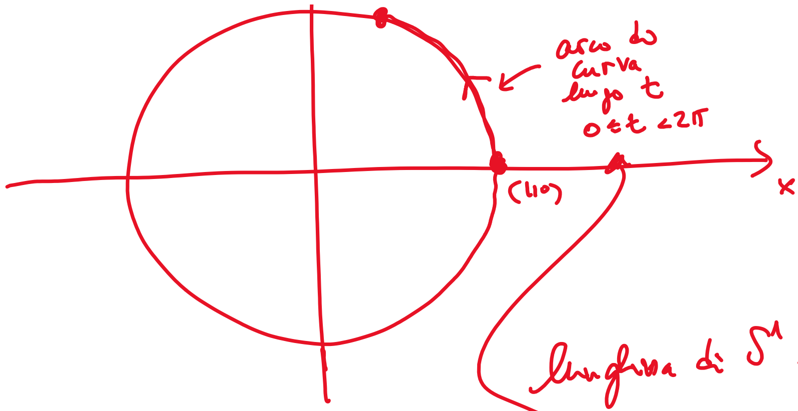
Vertice della parabola $(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

"Def"



$$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = coppie ordinate di numeri reali

$(x,y) \neq (y,x)$ se $x \neq y$

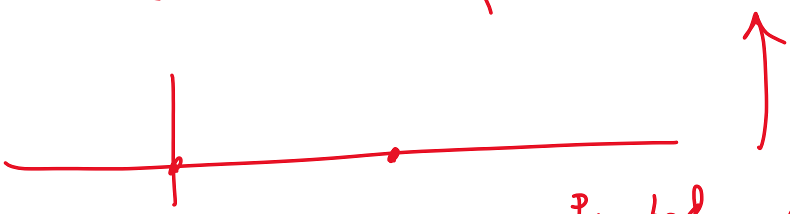
lunghezza di $S^1 =: 2\pi$

$(x(t), y(t)) .=$ coordinate del punto (x,y)

<u>Def</u> $\begin{cases} \cos t := x(t) \\ \sin t .= y(t). \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$

estendo per periodicità $\forall\, t$

$\cos(t+2\pi) = \cos t$, $\sin(t+2\pi) = \sin t$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.



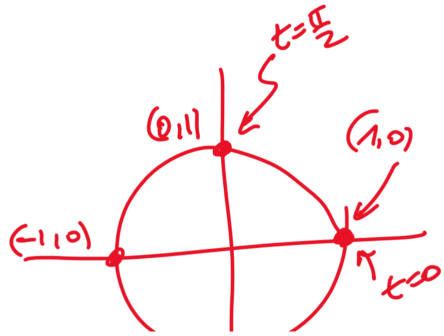
(1) Per def $\sin t$ e $\cos t$ sono funzioni definite <u>$\forall\, t \in \mathbb{R}$</u> e periodiche di periodo 2π.

<u>Proprietà</u>

(2) <u>Per def.</u> $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\left((\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1 \right)$

(3) <u>Valori speciali</u>



$t=0$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$

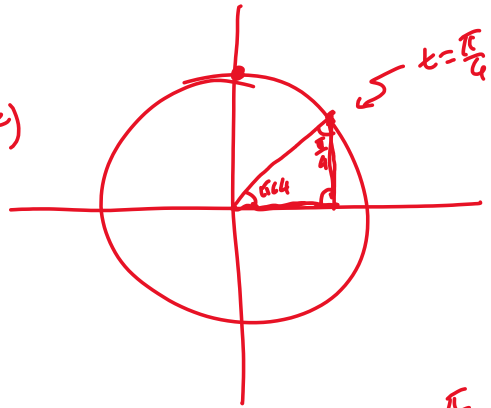
$t=\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$t=\pi$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$

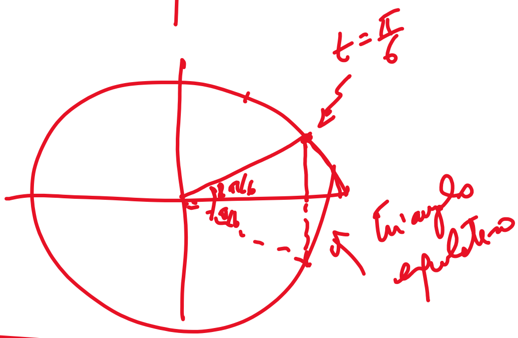
$t=\frac{3}{2}\pi$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$, $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$

$t=\frac{\pi}{4}$ $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ (geom. euclidea)

$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

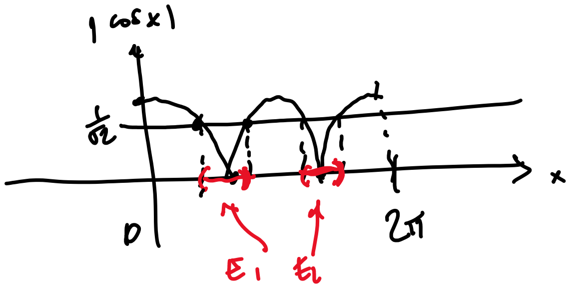


$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



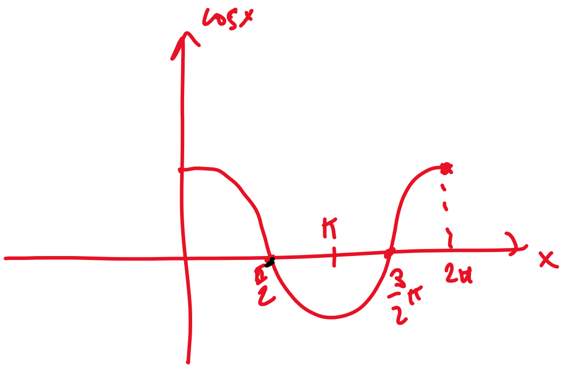
[GE] Es. 21 cap 2.

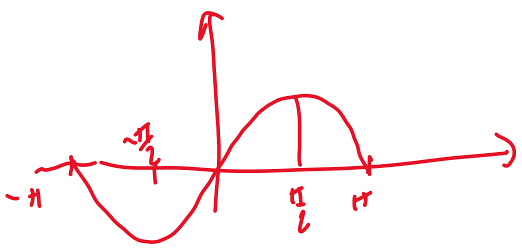
$A = \{x \mid |\cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

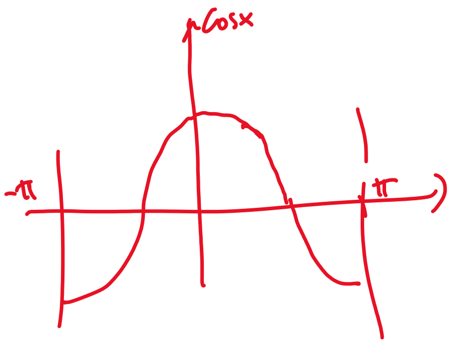


$E = E_1 \cup E_2$

$A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (E + 2k\pi)$





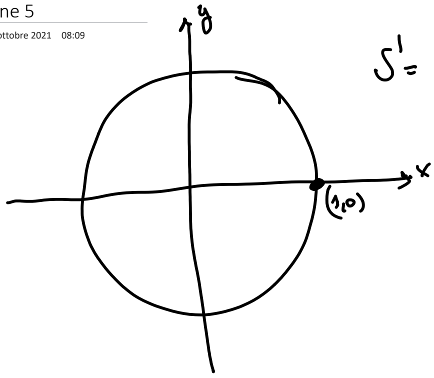


$$\begin{cases} \cos(t+s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s \\ \sin(t+s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s \end{cases}$$

FORMULE DI ADDIZIONE

$$\left[\; e^{it} = \cos t + i \sin t \;\right]$$

$$e^{i\pi} = -1$$



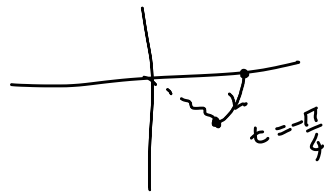
$S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

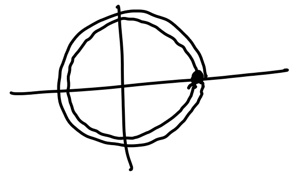
lunghezza di $S^1 = 2\pi$

orientamento positivo su S^1 è antiorario
" negativo " " orario

t = lunghezza con segno di un arco

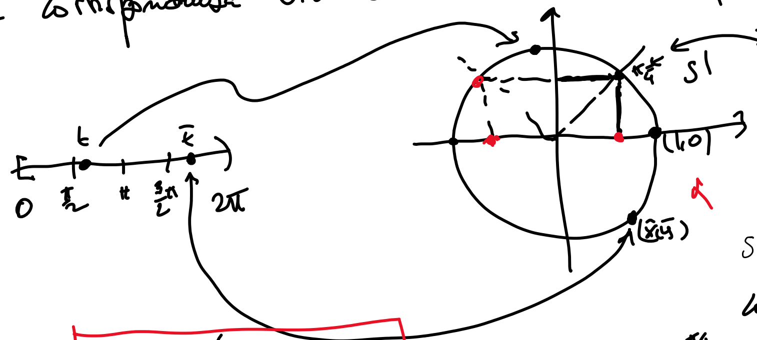
$-\frac{\pi}{4}$





$t=4\pi$ 2 giri in senso antiorario

Prendendo avevo preso $t \in [0,2\pi)$ e in questo caso c'è una corrispondenza biunivoca tra t e i punti di S^1



$x=y$
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x^2=1 \\ x^2=\frac{1}{2} \\ y=x=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2} \end{cases}$$

$\boxed{(x,y) = (\cos t, \sin t)}$

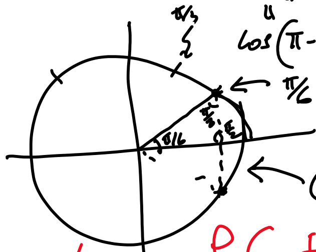
$\sin\frac{3}{4}\pi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt2}$

$\cos\frac{3}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt2}$

$t=\pi \quad s=-\frac{\pi}{4}$

$\cos(\pi-\frac{\pi}{4}) = \cos\pi\cos(-\frac{\pi}{4}) - \cancel{\sin\pi \sin(-\frac{\pi}{4})}$

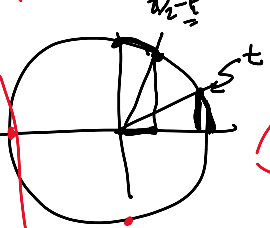
$= -1\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt2}$



$\boxed{\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}}$ (uso la geometria euclidea)

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t \\ \cos(-t) &= \cos t \end{aligned}}$$

$\sin t$ è una funzione DISPARI di t $\quad f(-t) = -f(t)$
$\cos t$ " " " PARI di t $\quad f(-t) = f(t)$



$\cos(\frac{\pi}{2}-t) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(-t) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(-t)$
$= \sin t$

$\boxed{\sin(\frac{\pi}{2}-t) = \cos t}$

!!!
$$\boxed{\begin{aligned} \cos(t+s) &= \cos t\cos s - \sin t\sin s \\ \sin(t+s) &= \sin t\cos s + \sin s\cos t \end{aligned}}$$

FORMULE DI ADDIZIONE

Bisogna sapere $\sin(\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2})$ $\forall k$
$\cos(\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2})$ $\forall k$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2}$
$\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt3/2$

e "multipli"

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \left(\Leftrightarrow (\cos t, \sin t) \in S^1\right)$

Es. Ricavare la formula (1) dalle formule di addizione

Sol. $s = -t$

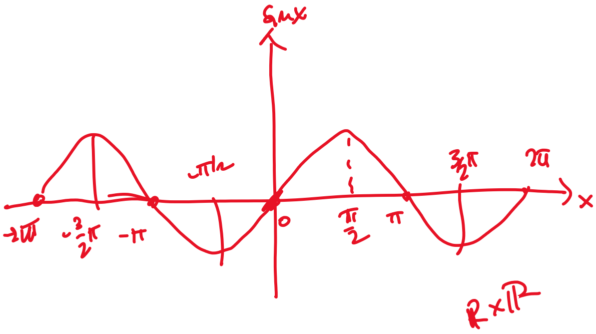
$$1 = \cos 0 = \cos t \cos(-t) - \sin t \sin(-t) = \cos^2 t + \sin^2 t.$$

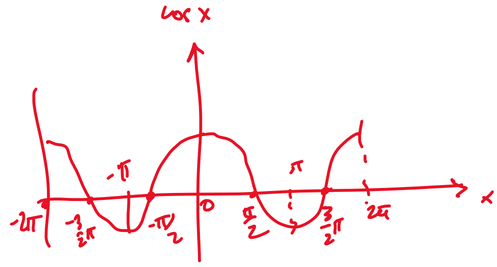
$t + s = t + (-t) = 0$

Es. Dedurre le formule di duplicazione dalle formule di addizione

! $\begin{cases} \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \\ \sin 2t = 2 \sin t \cos t \end{cases}$

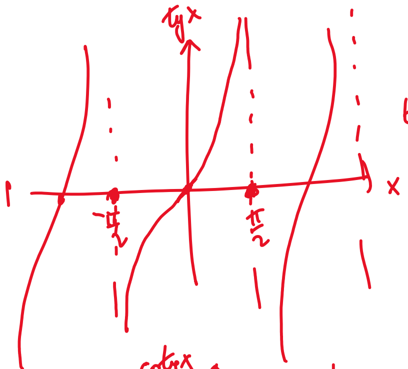
Def. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$





$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\cos(t + 2\pi) = \cos t$ e $\sin(2\pi + t) = \sin t$ (segue dalle formule di addizione)

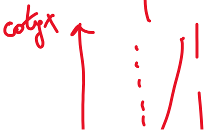


$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

NB $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

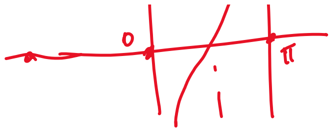
Es. ↑ dimostrare questa formula usando le formule di addizione

Dominio della tg è $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$



$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Dominio della cotg è $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$



Es. Sia $t := \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ Calcolare $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\frac{2t}{1+t^2}$

Svolgimento $\quad 1+t^2 = 1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$$1-t^2 = 1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

! $\boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x} \quad \boxed{\frac{2t}{1+t^2} = \sin x}$

$$2t = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \qquad \frac{2t}{1+t^2} = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$$

T.V., Es 1, (33)

$$A = \left\{ x \in [-\pi, 4\pi] \;\middle|\; \sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \right\}$$

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$$

1ª idea $\longrightarrow$ $\quad \sin^2 x + 3(1-\sin^2 x) + \sin x - 2 = 0$

$$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

2ª idea $\longrightarrow$ $\quad 2y^2 - y - 1 = 0, \quad y := \sin x$

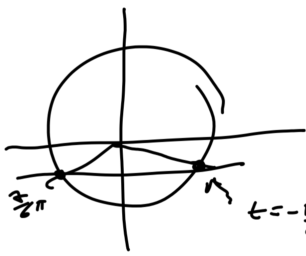
$$y_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- $\sin x = 1$ oppure $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

- $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\qquad\qquad\qquad = \frac{7}{6} + 2k\pi$



DEF

$x \in [a,b)$
$\Updownarrow$
$a \le x < b$

$[-\pi, 4\pi]$

$\boxed{x \in [a,b] \iff a \le x \le b}$ DEF

$[-\pi, 4\pi] \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi + 4k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ $=$ $k=0$

$-\pi \le \frac{\pi + 4\pi k}{2} \le 4\pi$

$-2\pi \le \pi + 4k\pi \le 8\pi$

$[-2\pi, 8\pi] \ni \pi + 4k\pi$

ok. $k = 0, 1 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$

$-\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 4\pi \iff -6\pi \le -\pi + 12k\pi \le 24\pi$

$\iff -6 \le 12k - 1 \le 24$, $k \in \mathbb{Z}$

ok. $0, 1, 2$

$-\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi$

$-\frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6}$

$-\frac{1}{6} + 4 = \frac{23}{6}$

$-\pi \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \le 4\pi$

$-6 \le 7 + 12k \le 24$

$k=0$ ✓.
$k=-1$
$k=1$

$\frac{7+12k}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi$, $-\frac{5}{6}\pi$

tutte le soluzioni sono. $A = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi \right\}$

$= \left\{ -\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi \right\}$

SUCCESSIONI

Def. una successione (a valori in $\mathbb{R}$) è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

$$f : n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{R}$$

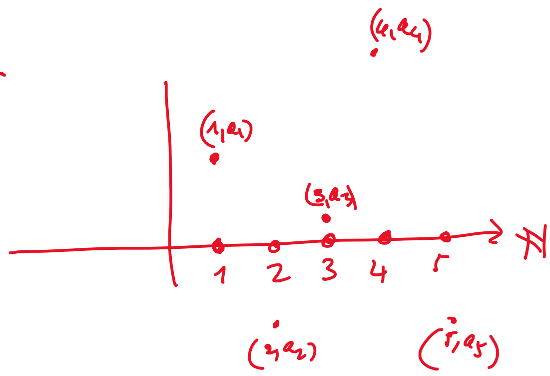
Notazione standard: una successione si denota $\{a_n\}$

N.B. non confondere $\{a_n\}$ con l'insieme dei suoi valori ossia con $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{im}(\{a_n\})$

immagine della funzione $\{a_n\}$

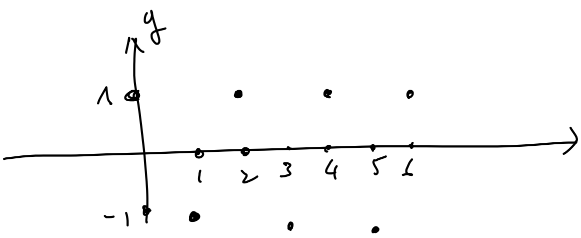
N.B. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

$\{a_n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$



Esempi

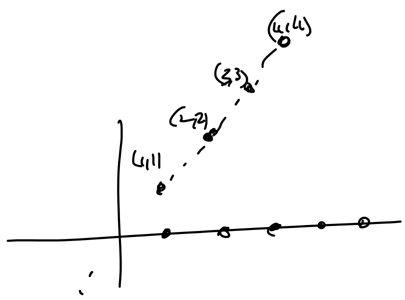
1. $a_n = (-1)^n$, $\mathrm{im}(\{a_n\}) = \{1, -1\}$



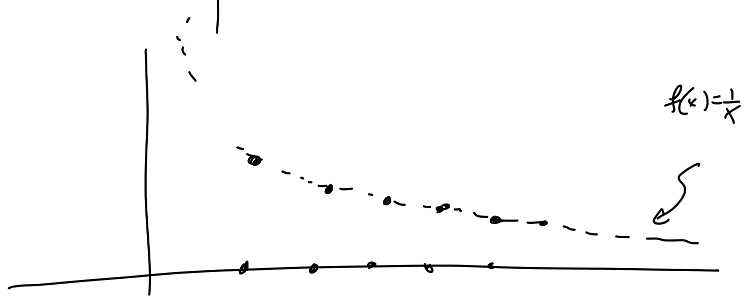
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2. $a_n = n$

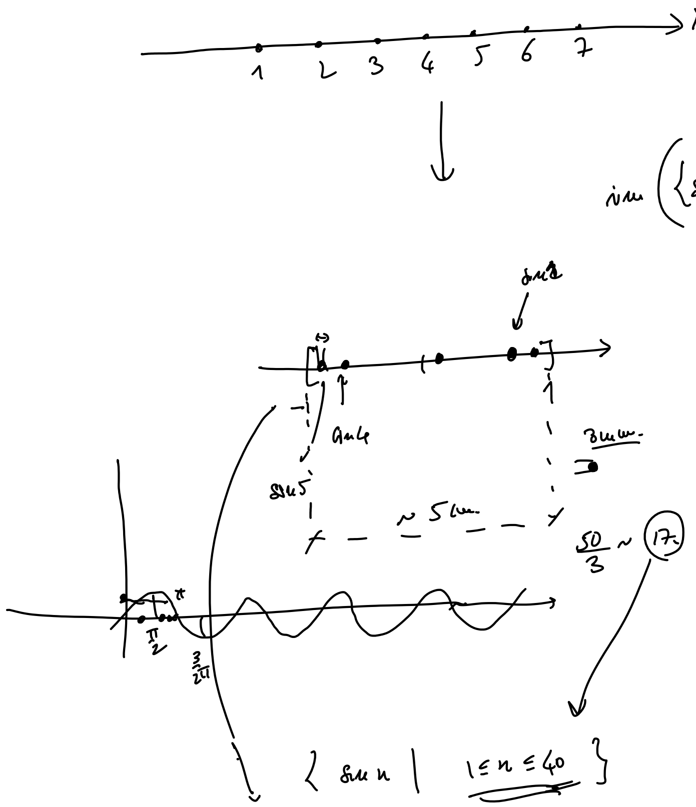
$\mathrm{im}(\{a_n\}) = \mathbb{N}$



3. $a_n = \frac{1}{n}$



4 sin n



$\mathrm{im}\left(\{\sin n\}\right) \subseteq [-1,1]$
$\subseteq (-1,1)$

Es. $\sin x = 1$
$\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

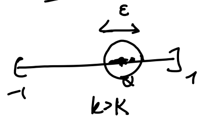
Se fosse $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = n$ per qualche n,

$\iff \pi = \frac{n}{\frac{1}{2}+2k} = \frac{2n}{1+2nk} \in \mathbb{Q}$

ma qualcuno c'ha detto che $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Teorema $\forall \alpha \in [-1,1]$ $\exists$ una successione $\{n_k\}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. t.c.

$\lim_{k\to+\infty} \sin n_k = \alpha$ $\leftarrow$ se fisso $\varepsilon = 10^{-2}$, $\exists\, K \mid$ $|\sin n_k - \alpha| < 10^{-2}$ $\forall\, k \geq K$ [illegible]



intuitivamente "$\sin n_k$ si avvicina $\underbrace{\text{sempre di più}}_{\Uparrow}$ ad α."
per k che cresce

DEF di limite di una successione (!!)

1. Dato $L \in \mathbb{R}$ e $\{a_n\}$ successione, si dice che $L = \lim_{n\to\infty} a_n$
("L è il limite per n che tende a $+\infty$ di a_n" o più semplicemente
"L è il limite di $\{a_n\}$", e si scrive anche $\lim a_n = L$,)

$a_n \to L$) se $\underline{\forall\ \varepsilon > 0}$ (comunque fisso una precisione data)

$\exists\ \underline{N} \in \mathbb{R}$ | $\boxed{|a_n - L| < \varepsilon}$, $\forall\ n > \underline{\underline{N}}$

distanza tra a_n e L

2 Data $\{a_n\}$ si dice che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se $\forall\ M > 0$ $\exists\ N$ |

$\boxed{a_n > M}$, $\forall\ n > N$.

Analog. $\{a_n\}$ tende a $-\infty$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se $\forall\ M < 0$

$\exists N$ | $\boxed{a_n < M}$, $\forall\ n > N$.

Esercizi (propedeutici agli esercizi di [GE])

Verificare, usando la definizione di limite, che:

1 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$L = 0$. $\underline{\text{Dato } \varepsilon > 0}$

$\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ se $n \geq N$

$\frac{1}{n} \overset{?}{<} \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$, $\boxed{N = \frac{1}{\varepsilon}}$

se $n > N \iff \frac{1}{n} < \varepsilon$.

se per $n \geq \underline{N}$ $\to |a_n - L| < \varepsilon$ allora se $\bar{N} > \underline{N}$ dovranti $\underline{|a_n - L| < \varepsilon\ \forall\ n \geq \bar{N}}$

[Se vogliamo il primo naturale N t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon$

se $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$ se $\frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{\varepsilon} = N_0 + x$, $0 < x < 1$

$\underline{N = N_0 + 1}$.]

se $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{2} = 1{,}41.. = \underline{1+1}$, $N = 2$

2. $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\underline{\text{Dato } \varepsilon > 0}$ $\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{?}{<} \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{1}{\varepsilon^2} < n$

se $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Risposta $\quad N = \frac{}{\varepsilon^2}$

3. $\lim \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$

Fisso $\varepsilon > 0$. $\quad |a_n - L| = \left| \dfrac{2n-1}{n+1} - 2 \right| = \dfrac{|\cancel{2n} - 1 - \cancel{2n} - 2|}{n+1}$

$= \dfrac{|-3|}{n+1} = \dfrac{3}{n+1}$

Voglio risolvere $\quad \dfrac{3}{n+1} < \varepsilon \iff \dfrac{3}{\varepsilon} < n+1$

$\iff \dfrac{3}{\varepsilon} - 1 < n \quad , \quad \underline{N} := \max \left\{ 1, \dfrac{3}{\varepsilon} - 1 \right\}$

se $n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$

4. $\lim \left(n - \sqrt{n^2 - 1} \right) = 0$ ✓ $\quad \left(\sqrt{n^2-1} < n \right)$

$\left| n - \sqrt{n^2-1} - 0 \right| = n - \sqrt{n^2-1}$

· Dato $\varepsilon > 0$, $1 > \varepsilon$, $\exists N \mid n - \sqrt{n^2-1} < \varepsilon$ se $n > N$

$n - \sqrt{n^2-1} < \varepsilon \iff \underline{n - \varepsilon} < \sqrt{n^2-1}$ $\quad \underline{n - \varepsilon > 0}$

NB posso assumere che $0 < \varepsilon < 1$ perché se qualcuno mi dà un'approssimazione $\bar{\varepsilon} > 0$ ma io so risolvere $|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$

con $\varepsilon < 1$ arbitrario e $\leq \bar{\varepsilon}$

$\iff (n-\varepsilon)^2 < n^2 - 1$

$\cancel{n^2} - 2\varepsilon n + \varepsilon^2 < \cancel{n^2} - 1 \iff \varepsilon^2 + 1 < 2\varepsilon n \iff$

$\dfrac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon} < n \qquad N_1 = \dfrac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}.$

(più bello)

Altro metodo. $\quad a_n = n - \sqrt{n^2-1}$

razionalizziamo $\quad = \dfrac{\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}{n + \sqrt{n^2-1}} = \dfrac{n^2 - (n^2-1)}{n + \sqrt{n^2-1}} = \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$

Dato $\varepsilon > 0$ Voglio risolvere $\quad \dfrac{1}{\quad} < \varepsilon \quad$ ovvero $\quad \dfrac{1}{\varepsilon} < n + \sqrt{n^2-1}$

$n+\sqrt{n^2-1}$

osservo che $\quad n+\sqrt{n^2-1} \geq n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad$ $N_2 = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\left(N_2 > N_1 \qquad \underset{N_1}{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} \overset{?}{<} \underset{N_2}{\frac{1}{\varepsilon}} \right) \qquad \varepsilon < 1$$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - n) = -\infty$

Sia $M<0$ voglio trovare N | $\sqrt{n} - n < M \quad \forall n \geq N$

$\Updownarrow$

non troverò l'M ottimale $\quad \Rightarrow n - \sqrt{n} > -M$ ← positivo. $-M>0$.

$\bar{M} = -M > 0$

$$n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{n}{2} > \bar{M}$$

$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, se $n \geq 2$

oppure $n \geq 4$

se $N \geq 2$ $\qquad n > 2\bar{M}$

$\rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2}$

$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4 \right)$

$$\boxed{N = \max\{2, -2M\}}$$

$2\bar{M}$, $\bar{M} = -M$.

6 $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

$\varepsilon > 0$ $\qquad \left|\frac{\sin n}{n}\right| < \varepsilon$ $\quad$ cioè $\quad \frac{|\sin n|}{n} < \varepsilon$

Osservo che $\quad |\sin n| \leq 1 \qquad \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}, \; N = \frac{1}{\varepsilon}$

7 $\lim 2^n = +\infty$

Dato $M>0$ vogliamo risolvere $2^n > M \quad \forall n > N$

$\Leftrightarrow \log_2 2^n > \log_2 M$ $\qquad$ essendo $\log_2 x$ strett. crescente

$$\| \qquad n > \boxed{\log_2 M = N.}$$

8^* $\lim \dfrac{2^n}{n^{10^{10^{10}}}} = +\infty$?? .

oppure in generale

Fissiamo $\alpha > 1$ Dato $\varepsilon > 0$ trovare $N \mid \dfrac{2^n}{n^\alpha} < \varepsilon$

· probabilmente risolveremo questo esercizio nel 2° semestre

Ricordiamo: • Data $\{a_n\}$ successione e dato $L \in \mathbb{R}$ si dice

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \overset{DEF}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N > 0 \mid |a_n - L| < \varepsilon,\ \forall\, n > N$

prima fisso $\varepsilon > 0$ (una approssimazione arbitraria)

$|a_n - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \iff L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

• $a_n \to +\infty$ $\left(\iff \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\right)$

$\iff \forall\, M > 0\ \exists\, N > 0 \mid a_n > M,\ \forall\, n > N$

$a_n \to -\infty \iff \forall\, M < 0,\ \exists\, N > 0 \mid a_n < M\ \ \forall\, n > N.$

[GE] Cap 3 Es 8

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2n-1}{3n+2}}_{a_n} = \frac{2}{3}$ $\qquad a_n - \frac{2}{3} = \frac{\cancel{6n}-3-\cancel{6n}-4}{(3n+2)3} = -\frac{7}{3}\frac{1}{3n+2}$

Fisso $\varepsilon > 0$, $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \frac{7}{3}\frac{1}{3n+2} \overset{?}{<} \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

$\iff \boxed{\frac{7}{3\varepsilon} < 3n+2}$ $\quad \left(3n+2 > 2 > \frac{7}{3\varepsilon}\right)$ NO — non risulta a risolvere

$\Leftarrow \boxed{\frac{7}{3\varepsilon} < 3n}$ ($3n < 3n+2$) $\iff \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{\varepsilon} < n$

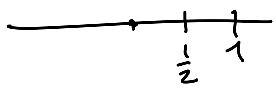
Se fosse stato $\frac{7}{3}\frac{1}{3n-10} < \varepsilon$ avrei avuto che $N > 4 \Rightarrow n > N$, $3n - 10 > 0$ ✓

Sia $N := \frac{7}{9}\frac{1}{\varepsilon}$, allora se $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

[GE] Cap 3 Es 5

$\lim_{n\to\infty} n^2 - n\sin n = +\infty$

$\forall\, M > 0$ $\quad n^2 - n\sin n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\sin n\right) \overset{?}{>} \frac{n^2}{2}$



$1 - \frac{1}{n}\sin n > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} > \frac{\sin n}{n}$

$|x| \geq x$ $\quad \Leftarrow \frac{1}{2} > \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin n}{n}$ $\Leftarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{n}$ $\qquad n > 2$

Se $N > 2$ è vero che $1 - \frac{1}{n}\sin n > \frac{1}{2}$, se $n > N$.

Se $n > N > 2$ allora $n^2 - n\sin n > \frac{n^2}{2} > M$

se $n > \sqrt{2M}$, $\boxed{N = \max\{2, \sqrt{2M}\}}$

Cap 3, Es 6 $\quad \lim_{n\to+\infty} 2^n - n = +\infty$ $\quad$ ($2^n \to +\infty$, $n \to +\infty$)

$2^n > M \quad n > \log_2 M$ $\quad N$

$(M > 1)$

Dimostriamo che $2^n \geq 2n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

per induzione

base induttiva (i) $n=1$ $\quad 2 = 2^1 \geq 2\cdot 1 = 2$ ✓ ok.

(ii) Affermiamo che sia vero che $2^n \geq 2n$ per un qualche $n \geq 1$

"PRINCIPIO DI INDUZIONE" (è un Teorema)

Siano P_n delle affermazioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$

(esempio P_n : $2^n \geq 2n$)

Se è vero che:

(i) P_1 è vera

(ii) dato $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Allora P_n è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$2^{n+1} = 2\,(2^n) \geq 2\,(2n) = 4n \geq 2(n+1)$$

ip. induttiva P_n

infatti: $\quad 4n \geq 2(n+1) \iff 4n \geq 2n+2 \iff 2n \geq 2$ ✓

Dato $M>0$, $\quad 2^n - n \geq 2n - n = n > M$, $\quad N = M$

Es $\quad$ Dimostrare che $\quad 2^n - n^{3/2} \to +\infty$

Suggerimento: dimostrare che $2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 4$.

(i) base induttiva è $n=4$ ✓

(ii) se $n \geq 4$ e $2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Passiamo al calcolo dei limiti

Algebra dei limiti

Teorema 1 Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni t.c.

$a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $a_n + b_n \to \alpha + \beta$

(ii) $a_n b_n \to \alpha\beta$

(iii) se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\alpha}$ $\left(\Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to \frac{\beta}{\alpha}\right)$

(iv) se $a_n \leq b_n$ per $n \geq N \Rightarrow \alpha \leq \beta$

(v) se $\{c_n\}$ è t.c. per $n \geq N$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\alpha = \beta$

$\Rightarrow c_n \to \alpha$

Teorema 2. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

(i) $a_n \to +\infty$, $b_n \geq \beta \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq N$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to +\infty$

(ii) $a_n \to -\infty$, $b_n \leq \beta \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq N$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to -\infty$

(iii) $a_n \to 0$, e $|b_n| \leq M$, $\forall n$ $\Rightarrow$ $a_n b_n \to 0$

(iv) $a_n \to +\infty$, $b_n \geq \beta > 0$ $\forall n \geq N$ $\Rightarrow$ $a_n b_n \to +\infty$

$(a_n \to -\infty)$ ......

Teorema 3. (Alcuni limiti notevoli)

1. Sia $A > 0$. $\lim \sqrt[n]{A} = 1$

$n \to +\infty$

2. $A>1$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim \dfrac{n^a}{A^n} = 0$

3. $a>0$ $\lim \dfrac{\log n}{n^a} = 0$

4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

5. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e = 2.7\ldots$ numero di Eulero o Nepero

!!

6. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^{x} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}}_{\downarrow\, e}\right)^{x} \to e^{x} \right)$$

$x>0$

[GE] Cap 3 Es 26 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!}$

DEF. $n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)!, & \text{se } n\geq 1 \\ & n\in\mathbb{N} \end{cases}$

(definizione ricorsiva).

$0!=1$, $1!=1$, $2!=2$

$3! = 3\cdot 2 = 6$

$4! = 4 \cdot 3! = 24$

$5! = 5\cdot 24 = 120$

$\vdots$

$(n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1)$

$n! \geq \underbrace{n(n-1)(n-2)}$. $\forall n \geq 3$.

Per $n\geq 3$

$$\frac{n^2}{n!} \leq \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$$

Uso $a_n \to +\infty$ e $a_n \leq b_n$, per $n\geq N$.

$\Rightarrow b_n \to +\infty$

$$\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n^2}{n^3\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}}_{\downarrow\, 1} \xrightarrow{\text{AdL}} 0$$

Es 32

$$\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{\underbrace{(n+1)^5+(n-1)^5}} \to 6$$

$$a^n - b^n = (a-b)\overbrace{\left(a^{n-1}+\underbrace{a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}}+b^{n-1}\right)}^{n \text{ termini}}$$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

tutti i monomi $a^k b^h$ con $k+h=n-1$

$$(n+1)^6-(n-1)^6=\big((n+1)-(n-1)\big)\big((n+1)^5+(n+1)^4(n-1)+\dots+(n-1)^5\big) \quad \text{ossia } a^k b^{n-1-k}$$

$$2\,(n^5\,6+\dots)=12n^5+\text{ t di grado} \leq 4.$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{12n^5+a_4n^4+\dots}{2n^5+b_4n^4+\dots}=\frac{12+\overbrace{\frac{a_4}{n}+\dots}^{\to 0}}{2+\underbrace{\frac{b_4}{n}+\dots}_{\to 0}}\to\frac{12}{2}=6.$$

Lezione 8 8/10/21

venerdì 8 ottobre 2021 08:12

[GE] Cap 3 — Calcolare il limite di a_n giustificando i passaggi

Es 24 $a_n = \sqrt[n]{2n^5+1}$

$$a_n = (2n^5+1)^{\frac{1}{n}}$$
$$= (2n^5)^{\frac{1}{n}}\left(\left(1+\frac{1}{2n^5}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

per la proprietà delle potenze

Argomento intuitivo

$2n^5+1 \sim 2n^5$

$(2n^5+1)^{\frac{1}{n}} \sim (2n^5)^{\frac{1}{n}}$

$= 2^{\frac{1}{n}} \quad n^{\frac{5}{n}}$

$$= 2^{\frac{1}{n}}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^5\left(1+\frac{1}{2n^5}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$2^{\frac{1}{n}} \to 1$ per limite notevole

$n^{\frac{1}{n}} \to$ " "

$(n^{\frac{1}{n}})^5 = \underbrace{n^{\frac{1}{n}} \cdots n^{\frac{1}{n}}}_{5} \to 1$ per l'Alg. d. limiti

$\boxed{a_n \le b_n \le c_n \text{ e } a_n, c_n \to \alpha \Rightarrow b_n \to \alpha}$

$1 < \left(1+\frac{1}{2n^5}\right)^{\frac{1}{n}} \le 2^{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ per Teorema del confronto $\left(1+\frac{1}{2n^5}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 1$

Per A.d.L. $a_n \to 1$

Es.31 $a_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

intuitivamente $2^n+3^n \sim 3^n \Rightarrow a_n \to 3$

$$= 3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

prop potenze

(come prima) $1 < \left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}$ e per confronto $\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$

Per AdL $\lim a_n = 3$

Es 38 $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}$

$$a_n = \frac{n^3-(n^2+1)(n+1)}{n(n+1)}$$

termini di grado <2

$$= \frac{-n^2+\cdots}{}$$

Se $P(x)$ è un polinomio il suo grado $m = \deg(P)$ è l'esponente del monomio di grado massimo

$P(x) := a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$n^2 + n$

$\longrightarrow -1$ per algebra dei limiti

In generale se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di grado rispettivamente k e h.

$a_m \neq 0$ $\quad m = \deg(P)$

$a_k \in \mathbb{R}$ dati, $\quad x \in \mathbb{R}$ variabile

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k n^k + t.g.i}{b_h n^h + t.g.i}$$

termini di grado inferiore a k

$$= \frac{a_k n^k}{b_h n^h} \cdot \frac{1 + c\frac{1}{n} + \dots}{1 + d\frac{1}{n} + \dots}$$

$$= \frac{a_k}{b_h} n^{k-h} \alpha(n) \qquad \text{con } \alpha(n) \to 1 \text{ per } n \to +\infty$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 0 & k < h \\ \dfrac{a_k}{b_k} & k = h \\ +\infty, \ \text{se } a_k b_h > 0 & k > h \\ -\infty, \ \text{se } a_k b_h < 0 & k > h \end{cases}$$

Es 51 $\quad a_n = n\left(\sqrt[3]{8 + \sin 2^{\frac{1}{n}}} - 2\right)$ $\quad \sqrt[3]{8}$

Ricordo

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

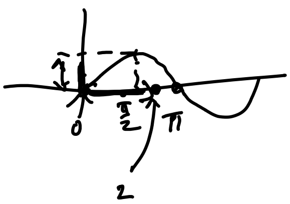
$a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

razionalizzo con $a = \sqrt[3]{8 + \sin 2^{\frac{1}{n}}}$ e $b = 2$

$$a_n = n \frac{\cancel{8} + \sin 2^{\frac{1}{n}} - \cancel{8}}{\left(8 + \sin 2^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(8 + \sin 2^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2 + 4}$$

$$\geq \frac{n \sin 2^{\frac{1}{n}}}{4} > \frac{n \cdot \sin 1}{4}, \quad (n \geq 2)$$

$\sin 2^{\frac{1}{n}} > 0$ $\qquad 1 < 2^{\frac{1}{n}} \leq 2$



$n \geq 2$, $\quad 1 < 2^{\frac{1}{n}} < \frac{\pi}{2}$

e $\quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \to \sin x$ è strett. crescente

$\Rightarrow \quad \sin 2^{\frac{1}{n}} > \sin 1 > 0, \quad \forall\, n \geq 2$

Quindi $\quad a_n > c\, n \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to +\infty$ per confronto.

Più semplicemente $\quad a_n = n\left(\sqrt[3]{8 + \sin 2^{\frac{1}{n}}} - 2\right)$

$\sin 2^{\frac{1}{n}} > \sin 1$ per $n \geq 2$.

Con le stesse motivazioni ...

$$a_n = n\left(\sqrt[3]{9+\sin 2^{\frac{1}{n}}} - 2\right) \underset{n\geq 2}{>} n\left(\underbrace{\sqrt[3]{8+\sin 1} - 2}_{a}\right)$$

$$9 + \sin 1 > 8 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow n \cdot a \to +\infty$$

Es $$a_n = n\left(\underbrace{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}} - 2}\right)$$

moltiplicando $n \cdot \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{c} =$ $\quad c > 2$

$$\frac{1}{n} c \Rightarrow 0$$

Es 47 $$\frac{\log n!}{n \log n} = \frac{\log n!}{\log n^n}$$

$$\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot n \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

(si dimostra per induzione)

Es. $\frac{n!}{n^n} \to 0$ è vero

$$\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \frac{1}{n}, \quad n \geq 3$$

$$\underset{n\geq 3}{<} \frac{1}{n} \to 0.$$

Intuitivamente, in prima approssimazione $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\frac{\log n!}{n \log n} \approx \frac{\log\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n \log n} = \frac{n(\log n - 1)}{n \log n} \to 1$$

$$\log\left(e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \leq \log n! \leq \log\left(en\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

$$\underbrace{\frac{1 + n(\log n - 1)}{n \log n}}_{\downarrow \text{ alg. di lim} \atop 1} \leq \frac{\log n!}{n \log n} \leq \underbrace{\frac{1 + \log n + n(\log n - 1)}{n \log n}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

dove

$$\boxed{a_n, b_n > 0 \quad a_n \sim b_n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim \frac{a_n}{b_n} = 1}$$

Es 68 $\quad n^2\, 2^{-\sqrt{n}} = \dfrac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$

$$= e^{2\log n}\, e^{-\sqrt{n}\log 2} = e^{(2\log n - \sqrt{n}\log 2)}$$

$$n^2 = e^{2\log n} \qquad = e^{-\sqrt{n}\log 2\left(1 - \frac{2\log n}{\log 2\,\sqrt{n}}\right)}$$

$$-\underline{\sqrt{n}\log 2}\left(1 - \frac{2\log n}{\log 2\cdot\sqrt{n}}\right) \to -\infty$$

$\log 2 > 0$ $\quad$ per A d L estesa

$$1 - \frac{2\log n}{\log 2\cdot\sqrt{n}} \to 1.$$

ho usato che se $b_n \to \infty \Rightarrow e^{-b_n} \to 0$

$e^{-b_n} = \dfrac{1}{e^{b_n}}$, $e^{b_n} \to +\infty$

$\Rightarrow e^{-b_n} \to 0$

$$\boxed{a_n \to +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \to 0}$$

A d L estesa

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n \to +\infty \quad e\ b_n \to \underline{\alpha > 0} \\ \Rightarrow \quad a_n b_n \to +\infty \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n \to -\infty \quad e\ b_n \to \alpha > 0 \\ \Rightarrow \quad a_n \cdot b_n \to -\infty \end{array}}$$

Attenzione: il viceversa NON è vero

$a_n \to 0 \not\Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \to +\infty$ NO

$a_n \to 0$ e $a_n > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \to +\infty$

$a_n \to 0$ e $a_n < 0 \not\Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \to -\infty$

---

67 $\quad \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^{2n}$ $\qquad$ usiamo $\underline{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \to e^x}$

$$= \left(\left(1+\frac{7}{n}\right)^n\right)^2 \to (e^7)^2 = e^{14}$$

A.d.L e

$a_n \to \alpha \quad a_n^p \to \alpha^p \quad \forall\, p \in \mathbb{N}$

Es 72 $\quad a_n = \dbinom{2n}{n}$ $\qquad$ COEFFICIENTE BINOMIALE

$n \geq m \geq 0$ numeri interi

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \in \mathbb{N}$$

"n sopra m"

$\dbinom{m}{\ } = \dbinom{m}{\ }$ ovvia

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}, \quad m \geq 1$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\; n!} = \frac{\overbrace{2n\,(2n-1)\cdot(2n-2)\cdots(n+1)}\;\cancel{n!}}{n!\;\cancel{n!}}$$

$$\left(n=4 \quad 8! = \underline{8\;7\;6\cdot 5}\;4! \right) \checkmark \qquad 2n-n$$

$$= \underset{k=0}{\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}} \cdot \underset{k=1}{\frac{2n-1}{n-1}} \cdot \underset{k=2}{\frac{2n-2}{n-2}} \cdots \cdots \underset{k=n-1}{\frac{n+1}{1}} > 2^n \to +\infty .$$

$$\frac{2n-k}{n-k} \geq 2 \qquad \cancel{2n}-k \geq \cancel{2n}-2k, \quad 2k > k \quad \underline{k \geq 1}$$

$\underline{Es}$ $\lim \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$ (sappiamo dall'esercizio precedente che

$$\lim \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} \geq 2$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\; n!}$$

$\boxed{\underline{\text{Teorema}} \quad a_n > 0 \text{ e } \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \text{ con } \alpha \geq 0 \text{ o } \alpha = +\infty \quad \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = \alpha}$

$$a_n = \binom{2n}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)\cancel{n!}\;((n+1))\cancel{n!}} \; \frac{\cancel{n!}\;\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}}$$

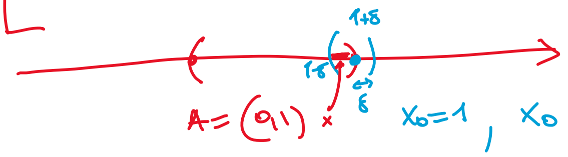
$$\longrightarrow 4. \quad \Rightarrow a_n \to 4$$

Sia $f : x \in A \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

dominio di f

DEF (i) $x_0 \in \mathbb{R}$ è un <u>punto limite</u> di A o <u>punto di accumulazione</u> se $\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A,\ x \neq x_0$

$|x - x_0| < \delta$ [ossia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

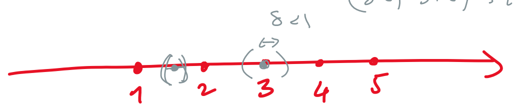


ES. $A = (0,1)$, $x_0 = 1$, $x_0 \notin A$

$(1-\delta, 1) \subseteq A$

$(3-\delta, 3+\delta) \setminus \{3\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

ES $\mathbb{N}$



$\nexists\, x_0 \in \mathbb{N}$, x_0 punto limite di $\mathbb{N}$

ES. $\mathbb{Q}$ $\quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ per la densità dei reali

$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \forall\, \delta > 0$ $\quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contiene ∞ numeri in $\mathbb{Q}$.

(ii) x_0 pto di accumulazione per A, $L \in \mathbb{R}$

si dice che L è il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \mid |f(x) - L| < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta$$

esclude x_0

<u>Esempi</u> (1) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} x^2 = \underset{L}{x_0^2}$ $\qquad (A = \mathbb{R})$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e $|x - x_0| < \delta \leq 1$, δ da determinare in funzione di ε

$$|f(x) - L| = |x^2 - x_0^2| = (x - x_0)\,|x + x_0| < \delta\,|x + x_0| = \delta\,|x - x_0 + 2x_0|$$

$$\leq \delta\,(|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta\,(\delta + 2|x_0|) \leq \delta\,(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon$$

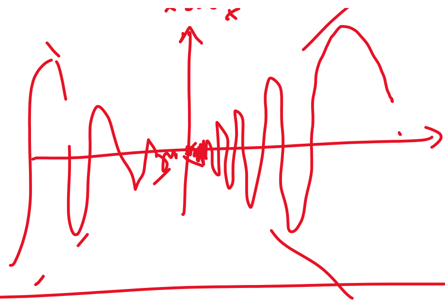
se $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right\}$.

(2) $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ $\qquad f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

0 è pto di acc. per A.

Fisso $\varepsilon > 0$, $\left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x|\,\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$ se

$0 < |x| < \varepsilon =: \delta$



Def. $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ pto di acc di A e $x_0 \in A$

f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Se x_0 è un pto di A ma non di accumulazione di A

$\left(\iff \exists \delta \mid (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\} \overset{def}{\iff} x_0 \text{ è un pto ISOLATO di } A \right.$

$\left. n \in \mathbb{N} \text{ è pto. isolato di } \mathbb{N} \right)$

f è sempre continua in x_0 pto isolato di A

OS. f è cont. in $x_0 \in A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \mid$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall \quad |x - x_0| < \delta$$

ESEMPI

$\big(\,||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \big)$

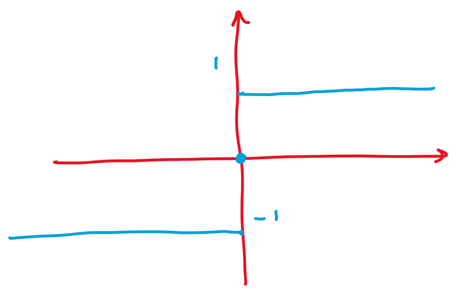
① $|x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$

Preso $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon \qquad |x - x_0| < \delta := \varepsilon$

Preso $\varepsilon > 0$

② $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

"signum(x)"



NON è continua in $x_0 = 0$

$$|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| = |\operatorname{sgn}(x)| = 1 \qquad \forall x \neq 0$$

o —— o —— o

5 Teoremi

Teo 1 (Algebra dei Limiti). x_0 pto di accumulazione per A

$f, g : A \to \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta$ $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$

(iii) $\alpha \neq 0 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\alpha}$

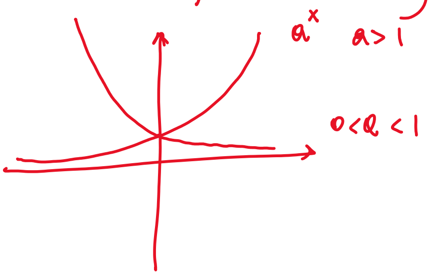
Teo 2 (funzioni continue). Le seguenti funzioni sono continue sul loro dominio di definizione :

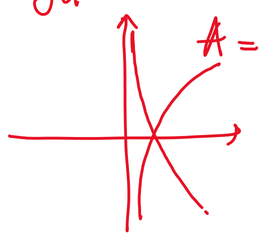
- x^n $\quad$ ($n \in \mathbb{N}_0$; $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{A = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$)

  $A = \mathbb{R}$ $\quad$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

- x^α $\quad$ ($\alpha > 0$, $A = [0, +\infty)$
  $\alpha < 0$, $A = (0, +\infty)$)

- a^x $\quad$ ($a > 0$; $x \in \mathbb{R} = A$) , $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$
  $A = (0, +\infty)$)





- $\sin x$, $\cos x$ $\quad$ ($x \in \mathbb{R}$)

  $\operatorname{tg} x$ $\quad$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) , $\quad \operatorname{cotg} x$ $\quad$ ($x \neq 0, k\pi$)

  $\arcsin x$ $\quad$ ($x \in [-1, 1]$)

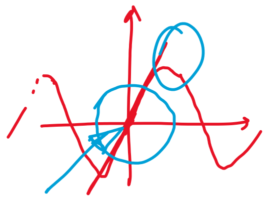
$\arccos x \quad (x \in [0,\pi])$

$\operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$

Teo 3 (Alcuni limiti notevoli)

(1) $\lim_{\boxed{x \to 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \to 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$



(4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\left(\frac{x}{\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \right)$

Teo 4 (confronto). $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, x_0 pto accumulaz A

$f \leq g \leq h$ in un intorno di x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \alpha \implies \lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha$$

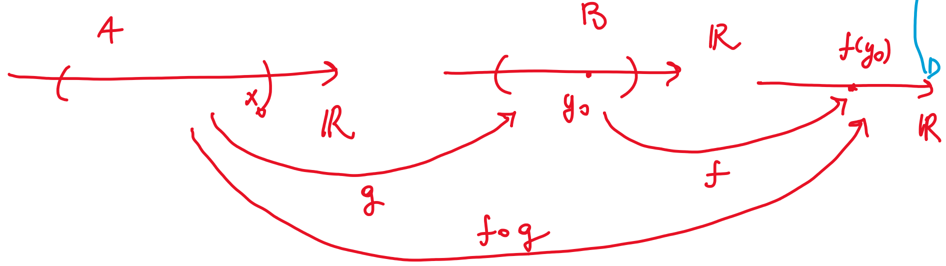
Teo 5 ("cambio di variabile"). $g : A \to B \subseteq \mathbb{R}$

$f : B \to \mathbb{R}$

Sia x_0 pto limite per A, y_0 pto limite per B;

$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, f continua in y_0.

Allora, $\lim_{x \to x_0} f\circ g(x) \underset{y = g(x)}{=} \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$



$\left(\lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right.$

$y = 3x$

$x \to 0$, $y \to 0$

$3 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 3$

Ad.L + Lim NOT

Esempi

1) e^{x^2} $\quad f(y) = e^{y}$, $g(x) = x^2$

Gaussiana

$$x \overset{g}{\longmapsto} x^2 \overset{f}{\longmapsto} e^{x^2} \qquad (f\circ g)$$

2) $\log(1+\sin x) = f\circ g(x)$ con $g(x) = 1 + \sin x$

$f(y) = \log(y)$ $\qquad A = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

$\boxed{\text{Esercizi}}$ [GE] Cap 5

Es. 87 $\quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{4x}\,\overbrace{\left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{4}\right)}^{\to 1}}{-\cancel{x}\,\underbrace{\left(1 - x^4\right)}_{\to 1}} \underset{\text{Alg dei limiti}}{=} -4$

Es. 92 $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi + 4x)}{x} =$

$\underset{\text{formula addiz sin x}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\overset{0}{\sin\pi}\cos 4x} + \sin 4x \overset{-1}{\cos\pi}}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{\sin 4x}{x\,4} \cdot 4$

$= 1$

$$= -4 \left(\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \right) = -4 .$$

cambio variabili

$y = 3x$

$x \to 0$ (x_0) $\quad y = 3x \to 0$ (y_0)

Es. 134 $\quad \displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}}$

Attenzione: il dominio di $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}}$ è

$A = \{ x \mid x > 0 \text{ e } \sin x > 0 \}$

(Eser.: scrivere A come unione di intervalli)

ma nel calcolare il limite possiamo prendere come dominio l'intervallo $(0,1)$. (Perché?)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \right)$$

$$\underset{\text{A.d.L.}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{\sin x}} \underset{y = \sqrt{\sin x}}{=} \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{e^{y} - 1}{y} = 1$$

lim. notevole.

Es. 99 $\quad \displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Esercizi dal DEMIDOVIC

[D] 197

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2 \right) = 3x^2$$

A. d. L.

[D] 204 $\displaystyle \lim_{x \to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \to 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)\left(x^{2/3} + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 4\right)}{\sqrt[3]{x} - 2}$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(x^{2/3} + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 4 \right) = 12$$

continuità di $x^{2/3}$, $\sqrt[3]{x}$ e A. d. L.

[D] 230 $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos\frac{y}{2}}{y}$

$y = \pi - x$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y/2}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} \cdot \frac{y}{4} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{4} = 0$$

lim. noti A. d. L.

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia A non limitato superiormente $(\forall M \; \exists x \in A \mid x > M)$

sia $L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \overset{def}{\iff}$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \mid |f(\underline{x}) - L| < \varepsilon, \; \forall \; \underline{x \in A \text{ e } x > M}$$

(cfr. la def. di $\lim_{n\to+\infty} x_n$, dove $A := \mathbb{N}$, $\begin{matrix} x_n \leftrightarrow f(x) \\ x(n) \end{matrix}$)

Es $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{2+\sin x} = 0$ infatti se $\varepsilon > 0$

$$0 \underset{=}{<} \frac{e^{-x}}{2+\sin x} \underset{\uparrow}{\leq} e^{-x} < \varepsilon \iff e^x > \frac{1}{\varepsilon} \iff \log x > \underbrace{\log \frac{1}{\varepsilon}}_{M}$$

$2 + \sin x \geq 1 \quad (-1 \leq \sin x \leq 1)$ $\qquad M = \max\{1, \log \frac{1}{\varepsilon}\}$

Come per le succ vale l'A.d.L (Algebra dei limiti)

Teor • A non limitato sup, $f, g: A \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \beta$

Allora, $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\, g(x) = \alpha \cdot \beta$; $\alpha \neq 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha}$

• (teor. confronto) $f \leq h \leq g$ $\qquad \alpha = \beta \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = \alpha$

Analog. si definisce il limite per $x \to -\infty$ per funzioni con dominio A non limitato inf. $(\iff \forall M < 0 \; \exists x \in A \mid x < M)$

Eser. Scrivere la def. di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$

Es $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0 \qquad (x \neq 0)$

Dato $\varepsilon > 0$ $\qquad \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$ $\qquad \dfrac{\sin x}{x}$ è una funzione pari

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{(-x)}$$

$$\lim_{\underline{\underline{x\to-\infty}}} \frac{\sin x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{\underline{y=-x}}}}{=} \lim_{\underline{\underline{y\to+\infty}}} \frac{\sin y}{y}$$

Dato $\varepsilon>0$, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon$

$\iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}$ $(x \to -\infty)$ $\iff -x > \frac{1}{\varepsilon} = M$

$\iff -x > M$, $\underline{x < -M}$

$\forall\ x < -M$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \quad a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0, \quad b>0$$

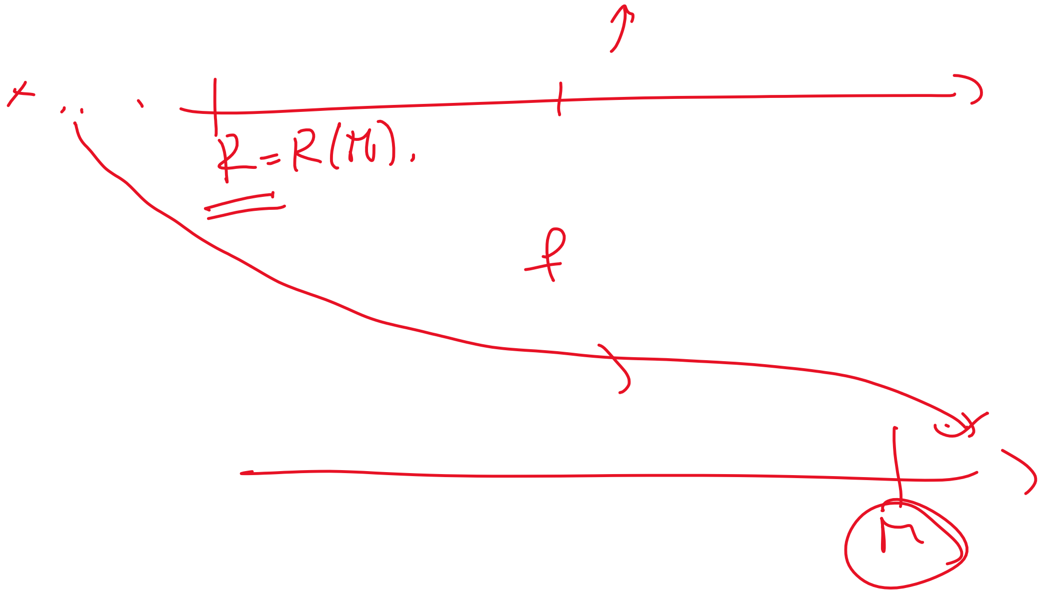
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha, \quad \forall\ \alpha\in\mathbb{R}$$

(nuovo)

Abbiamo usato anche la def. di $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (4 definizioni: scrivetele per esercizio tutte e 4 !!)

P.e. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff f: A\to\mathbb{R}$, con A non limitato inf.

$\forall\ M>0\ \exists\ R<0 \mid f(x) > M$, $\forall\ x\in A$ con $x<R$



ESERCIZI (DEMIDOVIC 215)

$x \to +\infty$ ... $= \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt[3]{x^3-1})$ ... $x^3(1-\frac{1}{x^3})$

$+\infty$ $\quad -\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right) = x(a-b) \quad a=1, \; b=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \boxed{a-b} = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

DIFFERENZA DI CUBI

$$= \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} \frac{\frac{1}{x^{\cancel{3}2}}}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$\frac{1}{x^{2}} \to 0$

$1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} \to 3$ PERCHE $\frac{1}{x^3} \to 0$

$$a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

$= 0$

$b = \sqrt[3]{\cancel{\ldots}}$

$$a^3-b^3 = \cancel{1}^3 - \left(\cancel{1}-\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3}$$

DEMIDOVIC 248

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \quad \text{"} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{+\infty} \text{"}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \overset{\text{ALGEBRA D. LIMITI}}{=} \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

$x+1 = x(1+\frac{1}{x})$

$$1^x = 1 \quad \forall x$$

DEMIDOVIC 245

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} \qquad x^2 \to +\infty$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{2x^2+1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} \longrightarrow \frac{1}{2}\right) \text{"}\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0\text{"}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \quad \exists M: x>M \implies \frac{1}{4} < \frac{x^2+2}{2x^2+1} < \frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\varepsilon < 1$$

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1

$x^2 \quad \ldots \quad x^2 \quad \ldots \quad x^2$

$$\left(\frac{-}{4}\right) < \left(\frac{}{2x^2+1}\right) < \left(\frac{-}{4}\right) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x^2+1}\right)=0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$0 \qquad 0$$

METODO PER $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ OPPURE $+\infty$ OPPURE $-\infty$

SE $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a \in (0,1)$ $\quad (0<a<1)$ $\quad g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$

ALLORA $f(x)^{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

SE $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a > 1$, $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ ALLORA $f(x)^{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$

GIUSTI ESERCIZI CAP. 5 N. 101 $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x^3}$

$-1\le \sin x \le 1 \Longrightarrow \frac{\log 2}{x^3} \le \frac{\log(3+\sin x)}{x^3} \le \frac{\log 4}{x^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\frac{\log 2}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ $\quad$ PERCHE $\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

TEO. DEL CONFRONTO $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x^3} = 0$

$\boxed{90}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4-x^2}{x-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4\left(1-\frac{1}{6x^2}\right)}{-x^3\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4}{-x^3} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{6x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 1$

$\quad\quad\quad\quad\;\; ||$

$\to -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4-x^2}{x-x^3} = -\infty$$

$\boxed{95}$ $$\lim_{x\to+\infty}\left(x-(\sin x)^2 \lg x\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty}\Big(\underbrace{1-\frac{\sin^2 x \lg x}{x}}_{\downarrow\, 1}\Big)$$

$$\left|\frac{\sin^2 x \lg x}{x}\right| \leq \frac{|\lg x|}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad |f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sin^2 x \lg x\right) = +\infty \qquad \underbrace{-|f(x)|}_{\downarrow\,0} \leq \underbrace{f(x)}_{\downarrow\,0} \leq \underbrace{|f(x)|}_{\downarrow\,0}$$

(CONFRONTO)

LIMITI LATERALI

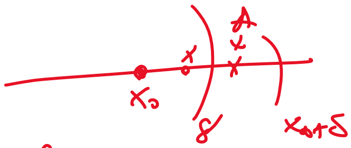
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 = 1 \ , \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$$

sgn è discont. in 0 dove ha una discont. di salto

DEF. limite destro (o da destra)

$f: A \to \mathbb{R}$,
diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un pto limite destro (o di accumulazione da destra)
se $\forall \delta > 0 \quad (x_0, x_0+\delta) \cap A \neq \emptyset$



Se x_0 è un pto limite destro di A dom. di f

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \big| \ |f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \cap A$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

e analog. per $\alpha = \pm\infty$, $\forall M \ldots$

Analog. per limiti da sinistra
(Eserc. scrivere per esteso tutte le definizioni)

Esercizio Calcolare i limiti laterali di $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, per $x \to 0$.

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x>0$, $y = \frac{1}{x}$ $\qquad y \to +\infty$

(NB. il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ è ben definito solo in $(0,+\infty)$ o $(-\infty, 0)$)

$e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $e^{y} = +\infty$

$x \to 0^+$ $\quad y \to +\infty$

$0 < x < \delta \iff y = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \frac{1}{x} > M \underset{x>0}{\iff} 0 < x < \frac{1}{M} = \varepsilon$

$\iff \lim_{y \to 0} y = 0, \quad y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \underset{y = -\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} e^{-y} = 0.$$

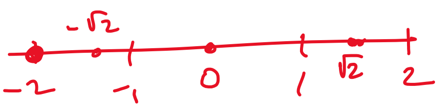
FUNZIONE PARTE INTERA E PARTE FRAZIONARIA

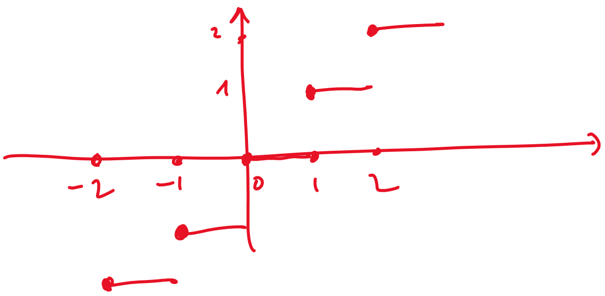
DEF. (parte intera) $x \in \mathbb{R}$, $[x] = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$

$[\sqrt{2}] = 1$ $\qquad [n.u_1u_2u_3\ldots] = ?$

notaz. decimale

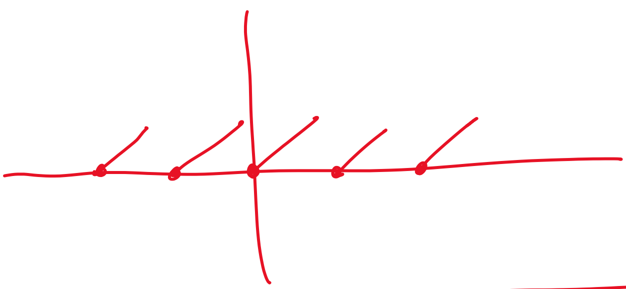
$[-\sqrt{2}] = -2$





$[x] = n$ è l'unico intero n | $n \leq x < n+1$

Parte frazionaria di x, $\{x\} := x - [x]$ $\qquad$ NB $\{x+1\} = \{x\}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$



Es Calcolare $\lim_{x \to n^\pm} [x]$, $\lim_{x \to n^\pm} \{x\}$ per $n \in \mathbb{Z}$

ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

DEF. • $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per l'insieme $A \, (\neq \emptyset)$

se $M \geq x$, $\forall x \in A$

(Analog. definizione per minoranti di A)

• A è limitato superiormente se $\exists$ un maggiorante di A

ossia se $\overline{\mathcal{M}}_A = \{ M \mid M \text{ è maggiorante di } A \} \neq \emptyset$

Se $A = \mathbb{N}$, $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{N}} = \emptyset$.

Teorema A limitato sup. Allora $\overline{\mathcal{M}}$ ha un minimo

(ossia $\exists \; \bar{s} \in \mathbb{R} \mid \bar{s} \in \overline{\mathcal{M}}$ $(\Leftrightarrow \bar{s} \geq x, \; \forall x \in A)$

e se $M \in \overline{\mathcal{M}} \Rightarrow$, $\bar{s} \leq M$)

Tale $\bar{s}$ si dice estremo superiore di A e si denota

con $\bar{s} = \sup A$

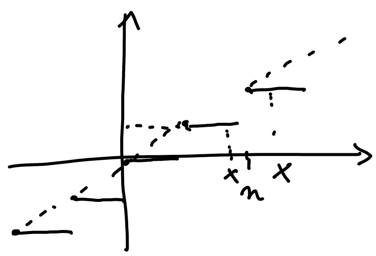
Tutto analogo per estremo inferiore: . . . .

↑ riempire!

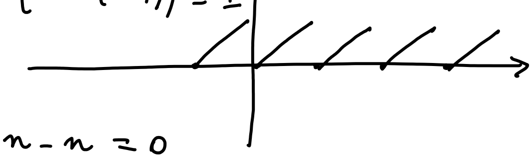
Esercizio $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1$$

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n$$



$$\lim_{x \to n^-} \{x\} = \lim_{x \to n^-} \left(x - [x] \right) = (n - (n-1)) = 1$$



$$\lim_{x \to n^+} \{x\} = \lim_{x \to n^+} \left(x - [x] \right) = n - n = 0$$

[GE] Giusti esercizi

140 $f(x) = \dfrac{x \sin x}{|x|}$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \sin x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} (-\sin x) = 0$$

$0 \in \mathbb{R}$ è punto di discontinuità eliminabile per f

---

141 $f(x) = \dfrac{x \cos x}{|x|}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \cos x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} (-\cos x) = -1$$

$0 \in \mathbb{R}$ è punto di discontinuità di salto per f

---

145 $f(x) = \dfrac{2^{x+\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$1 = 2^0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{x+\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2^x \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2^y}{1+2^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{2^{-y}}_{\to 0} + 1} = 1$$

$y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2^{x+\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{\overbrace{2^y}^{\to 0}}{1 + \underbrace{2^y}_{\to 0}} = 0$$

moltiplicando num. e den. per 2^{-y}

0 è punto di discontinuità di salto per f

---

149 $$\lim_{x \to 0^+} \left(\log_3 x + \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-\log_3 y + y \right) = \lim_{y \to +\infty} y \left(-\frac{\log_3 y}{y} + 1 \right)$$

$y = 1$

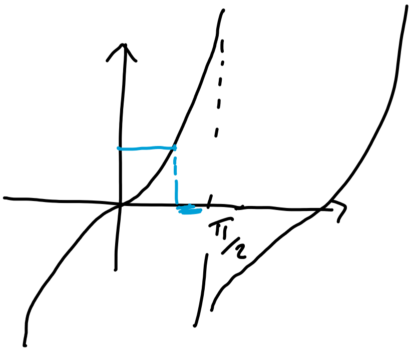
$\text{Dom} = \{x > 0\}$ $\qquad\qquad 0$

$= +\infty$

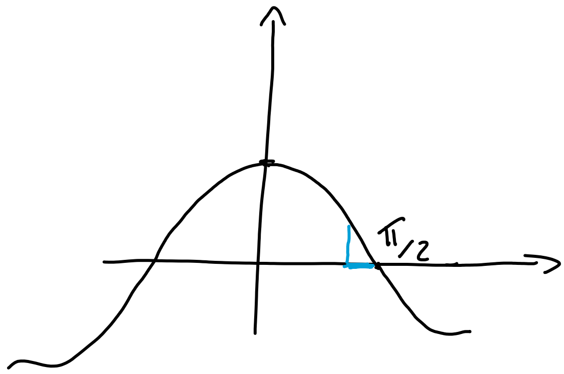
---

148 $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}}$

$y = \operatorname{tg} x$



$y = \cos x$



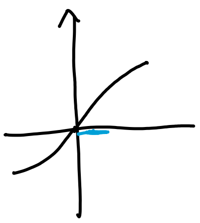
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}} = \lim_{y \to 0^+} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)^{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}} = \lim_{y \to 0^+} (\operatorname{cotg} y)^{\sqrt{\sin y}}$$

$y = \frac{\pi}{2} - x$

$x = \frac{\pi}{2} - y$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\cos y} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y \\ &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos y + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(-y)} = \cos y \\ &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = \operatorname{cotg} y \end{aligned}}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} (\operatorname{cotg} y)^{\sqrt{\sin y}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{(\cos y)^{\sqrt{\sin y}} \to 1}{(\sin y)^{\sqrt{\sin y}}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{(\sin y)^{\sqrt{\sin y}}}$$



$t = \sqrt{\operatorname{sen} y} \quad \rightsquigarrow \quad = \displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{(t^2)^t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{2t}}$

$= \lim \quad 1 \qquad \lim \quad 1 \quad = 1$

$t\to 0^+ \quad e^{\log t\,\cdot\,\ldots} \qquad t\to 0^+ \quad e^{\ldots}$

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log t = 0 \text{ , infatti}$$

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log t = -\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log \frac{1}{t} \underset{\frac{1}{t}=z}{=} \lim_{z\to+\infty} z^{-\alpha}\log z = \lim_{z\to+\infty} \frac{\log z}{z^\alpha} = 0$$

limite notevole

Discutere la continuità

171 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad$ f è continua $\forall x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Oss. $f(x) = f(-x) \implies$ se $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)$, allora $\exists \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

0 è punto di discontinuità eliminabile

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$

172 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -f(x)$$

f è dispari

se $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)$, allora $\exists \lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$= -\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

f ha discontinuità di salto in 0

---

173 $f(x) = x[x]$ $\qquad$ Se $x \in [n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$

$[x] = n \qquad f(x) = nx$

f è continua in ogni $x \notin \mathbb{Z}$

Sia $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to n^+} x[x] = n \cdot n = n^2 \qquad \lim_{x \to n^-} x[x] = n(n-1) = n^2 - n$$

$$n^2 \overset{?}{=} n^2 - n \iff n = 0$$

In 0 f è continua, mentre per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ f ha in n una discontinuità di salto

---

CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

Def. $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

(i) se $x_0 \in A$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq f(x_0)$

x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

(ii) se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha \neq \beta = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

x_0 si dice PUNTO DI SALTO o DISCONTINUITÀ DI SALTO per f

(iii) se uno dei limiti laterali, $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$, non esiste o è $+\infty$ o $-\infty$, si dice che x_0 è una discontinuità ESSENZIALE

N.B. nei casi (ii) e (iii) x_0 può anche non appartenere ad A.

Esempi (i) $f(x) = \mathrm{sgn}^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 1 \neq 0 = f(0) \Rightarrow 0$ è una discontinuità eliminabile di f.

(ii) $n \in \mathbb{Z}$ è una discontinuità di salto per $[x]$.

(iii) 0 è una discontinuità essenziale per $\frac{1}{x}$

o per $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Es. dimostrare che $\lim_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ non esiste.

Lezione 12 18-10-21

lunedì 18 ottobre 2021 08:13

Es 48 Cap 3 [GE]

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n+1]{n+1}\ \cdots\ \sqrt[2n]{2n}}_{n+1 \text{ termini}}}_{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \overbrace{\prod_{k=0}^{n} (n+k)^{\frac{1}{n+k}}}^{a_n}$$

$n+0 \quad n+1 \quad n+n$

fai il prodotto di $(n+k)^{\frac{1}{n+k}}$ per $0\le k\le n$, cioè:

$$n^{\frac{1}{n}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \ldots \cdot (2n)^{\frac{1}{2n}}$$

$\forall\ 0\le k\le n$ sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} (n+k)^{\frac{1}{n+k}} = 1$

Infatti $= \lim_{m\to+\infty} m^{\frac{1}{m}} = 1$

cambio di variabile, $m=n+k$

se $n\to+\infty$, $m\to+\infty$

Suggerimento. dimostrare che il limite è $+\infty$.

$$a_n \geq n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n+1}} \cdots n^{\frac{1}{2n}} = n^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}}} \geq n^{\frac{n+1}{2n}} \geq \sqrt{n} \to +\infty$$

$n^a \quad n^b$

$$\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{(n+1)}{2n}$$

per confronto $\lim a_n \geq \lim \sqrt{n} = +\infty$.

Ragionamento.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n}$$

$\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n} \quad \forall\ 0\le k\le n$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{2n}(n+1)$$

proprietà distributiva

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n} 1 \overset{?}{=} n+1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Dim per induzione

(i) base induttiva $n=0$ $\quad \sum_{k=0}^{0} 1 = 1$ ✓

(11) assumiamo (*) e dimostriamola per $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 1 = \sum_{k=0}^{n} 1 + 1 = (n+1)+1 = n+2 \checkmark$$

def. di sommatoria — ip. induttiva

Def. ricorsiva del simbolo $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ = somma per k che va da 1 a n di a_k.

data la successione $\{a_k\}_{k\geq 1}$

$$\sigma_n = \begin{cases} a_1 & , n=1 \\ \sigma_{n-1} + a_n & , n \geq 2 \end{cases}$$

[GE] Cap 3 es 32

$$\lim_{n\to+\infty} \left((\sqrt{n})^n - 3^n \right)$$

$\sqrt{n} \to +\infty$, $\sqrt{n} \geq 4$ $\quad n \geq 16$

Assumo che $n \geq 16$

$$(\sqrt{n})^n - 3^n \geq 4^n - 3^n = 4^n \left(1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right) \to +\infty$$

per A.d.L. estesa $\boxed{a_n \to +\infty,\ b_n \to b > 0 \Rightarrow a_n b_n \to +\infty}$

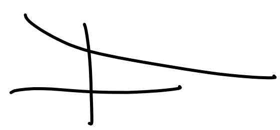
---

oppure $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ $\exists N \mid \boxed{\left(\tfrac{3}{4}\right)^n < \tfrac{1}{2}}$

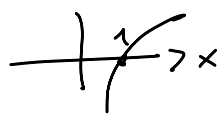
per $n \geq N$ $\quad 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 1 - \frac{1}{2}$

se $n \geq 16$, $n \geq N$ $\quad 4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \geq 4^n \, \frac{1}{2} \to +\infty$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n$ è un esp con base < 1



$\left(\frac{3}{4}\right)^N < \frac{1}{2}$ $\qquad N \log\frac{3}{4} < \log\frac{1}{2}$



$- N \log\frac{4}{3} < - \log 2$

$\lg \frac{4}{3}$

[GE] Cap 5, 147

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x}-1}{x}$$

N.B. Il dominio di $f(x)=\dfrac{x^{\sin x}-1}{x}$ è $(0,+\infty)$

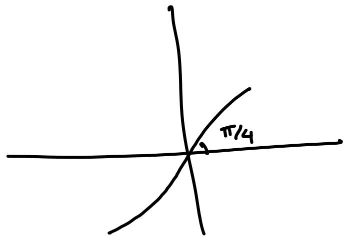
$$\boxed{x^{\alpha} \text{ con } \alpha \text{ reale è definito per } x>0}$$

Ragionamento standard

$$\frac{x^{\sin x}-1}{x} = \frac{e^{\sin x \log x}-1}{x}$$

$$\sin x \log x = \frac{\sin x}{x}\cdot x \log x$$

$$\boxed{\sin x \sim x \text{ per } x\to 0 \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$



$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0 \qquad \log x = y \qquad x=e^{y}$$

$$= \lim_{y\to-\infty} e^{y}\, y \underset{y=-t}{=} \lim_{t\to+\infty} e^{-t}(-t) = -\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{p}} = +\infty, \quad \forall p$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x \log x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x\log x}-1}{\sin x \log x}\cdot\frac{\sin x \log x}{x}$$

$y\to 0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\cdot \lim_{x\to 0}\log x = -\infty$$

$y=\sin x \log x$

$\frac{\sin x}{x}\to 1$

Se $f(x)\to 1$ per $x\to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

il $\lim_{x \to x_0} g(x)$ non esista.

[GE] Cap 3, Es 74 $\quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty, -\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

Se $a_n \to +\infty$ $\quad \lim \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^\alpha$

$$\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n} = e^{\left[n^n \log\left(1 + \frac{1}{n!}\right)\right]}$$

suggerimento standard

Studio $\quad n^n \log\left(1 + \frac{1}{n!}\right) = n^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n!}\right)}{\frac{1}{n!}} \to 1$

$$\sim \frac{n^n}{n!} \to +\infty \quad \text{quindi il lim è } +\infty.$$

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\overbrace{n \cdots n}^{n-1}}{(n-1) \cdots 1} \geq n$$

Es. dimo per induzione che $\frac{n^n}{n!} \geq n \quad \forall n \geq 1$

base induttiva $n=1$ $\quad \frac{1^1}{1!} = 1 = 1$ ✓

Assumiamo $\frac{n^n}{n!} \geq n$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{n+1}}{n! \quad \cancel{(n+1)}} = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdots \quad \text{oppure}$$

proviamo qualcosa di diverso

$\dfrac{\;}{n!} \qquad \dfrac{\;}{n!} \qquad \dfrac{\;}{(n-1)!}$

per $n=1$ ok.

sappiamo $\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ è vero per $n \geq 2$

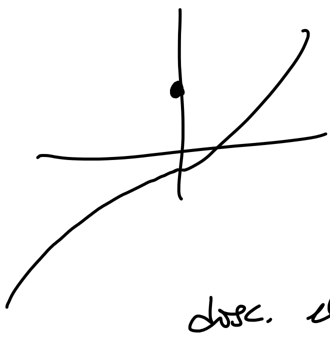
$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \geq n-1 \qquad \text{non ci basta.}$$

Ma allora perché $\dfrac{n^n}{n!} \geq n$?

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{n!} = \frac{\prod_{k=1}^{n} n}{\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{n}{k}\right) \geq n.$$

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \left(\frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{b}{d}\right)$$

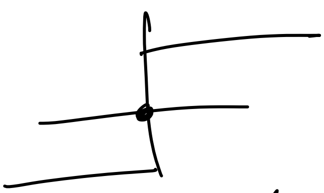
$$\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n!}\right)}{\frac{1}{n!}} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad x = \frac{1}{n!}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

disc. eliminabile.



$\exists \lim_{x \to x_0 \pm} f(x)$ ma sono diversi

disc. di salto (N.B. x_0 potrebbe non appartenere al dominio)

oppure uno dei limiti laterali o non esiste o è $\pm\infty$

con x_0 pto di acc. sinistro e/o destro

$\left\{ \frac{x}{0} \right.$ $\quad x \leq 0$,

$\rightarrow$ 0 è una disc. essenziale

$x \sin \frac{1}{x}$, 0 è una disc. eliminabile

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

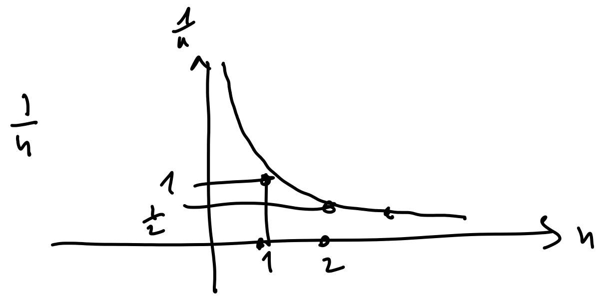
Es $\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x} \nexists$ dimostratelo!

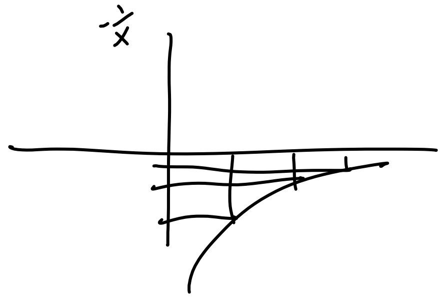
[AT] Es 46 cap 2

Trovare sup e inf e dire se sono max. o min. dell'insieme A

sup A con $A = \left\{ x = \frac{3n-2}{2n} \, , \, n \in \mathbb{N} \right\}$

$$x_n = \frac{3n-2}{2n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$





$\frac{1}{n}$ è strettamente decrescente

$-\frac{1}{n}$ è str. cresc.

$\frac{3}{2} - \frac{1}{n}$ è strett crescente.

$x_1 = \frac{1}{2} < x_n \quad \forall \, n \geq 2$

$\Rightarrow$ x_1 è il minimo di A

$\Rightarrow$ $x_1 = \inf A$

inf A = massimo dei minoranti di A

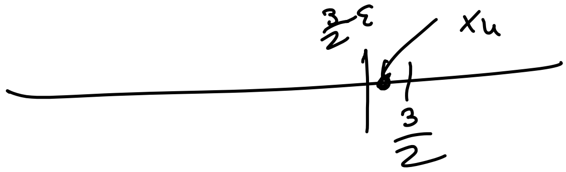
N.B $\quad \bar{S} = \sup A \quad$ A limitato superiormente e non vuoto

$\Longleftrightarrow \left\{ \right.$ $\bar{S}$ è un maggiorante di A $\Longleftrightarrow \bar{S} \geq x, \forall x \in A$

$\bar{s}$ ha supporto di dire che $\bar{s}-\varepsilon$ è un maggiorante

$$\underline{s} = \inf A \iff \begin{cases} \underline{s} \text{ è un minorante di } A \iff \underline{s} \le x, \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad x < \underline{s} + \varepsilon \end{cases}$$

$\sup A = \frac{3}{2}$ perché $x_n \nearrow \frac{3}{2}$, $x_n < \frac{3}{2}$



Lezione 13 20-10-21

mercoledì 20 ottobre 2021 08:12

DERIVATE

Def $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a<b$

$x_0 \in [a,b]$ se $\exists$ il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (x \neq x_0)$$

$R_f(x,x_0)$ = RAPPORTO INCREMENTALE DI f

tale limite prende il nome DERIVATA DI f in x_0

Oss. La derivata in x_0 $\exists$ se $\exists$ esistono i limiti laterali e coincidono

$$\lim_{x \to x_0^+} R_f(x,x_0) = \lim_{x \to x_0^-} R_f(x,x_0)$$

Notazione la derivata in x_0 di f si denota con

$f'(x_0)$ (Notazione di Lagrange)

$Df(x_0)$ $\left(Df\big|_{x_0} ,\ Df\big|_{x=x_0} \right)$

$\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (Not Leibnitz)

Derivata destra/sinistra $\quad D_+f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} R_f(x,x_0)$

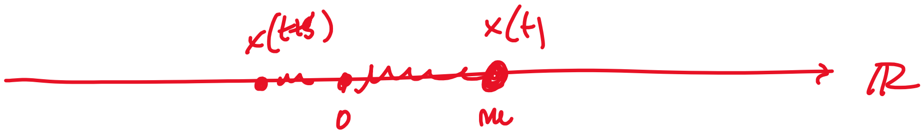
$D_-f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} R_f(x,x_0)$

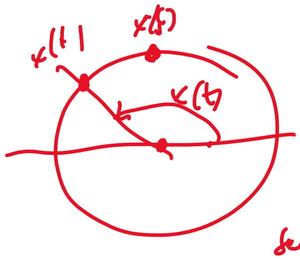
---

interpretazioni della ...

1 **Velocità** $\quad t \to x(t) \in \mathbb{R}$

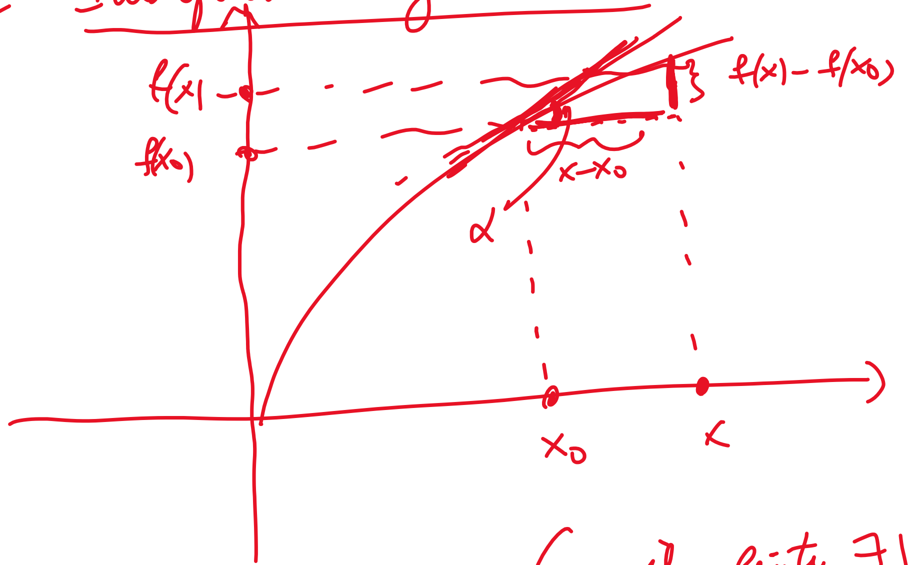
$\uparrow$ tempo variabile indipendente



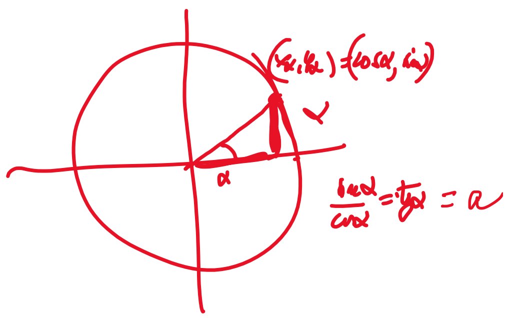


$$\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \overset{\text{se } \exists}{=} \dot{x}(t_0) = x'(t_0)$$ = la velocità istantanea del punto di coordinata x al tempo t_0.

2 **Interpretazione geometrica**



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \operatorname{tg}\alpha$$

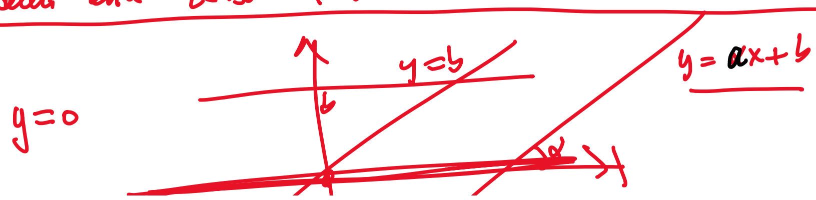


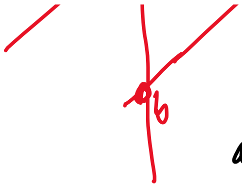
per $x \to x_0$ (e il limite $\exists$)

$R_f(x,x_0) \to$ coeff. angolare della retta tg al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Oss $\quad y = ax+b$

$a :=$ il coeff angolare della retta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$





$a = \operatorname{tg} \alpha$ $\quad$ $(\text{se } \exists)$

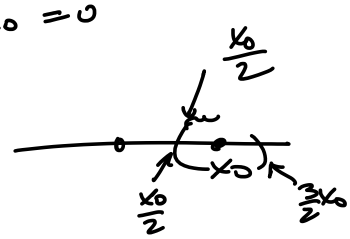
Es $\quad f(x) = ax + b \quad$ calcoliamo la $f'(x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\alpha x + \cancel{b} - \alpha x_0 - \cancel{b}}{x - x_0} = \alpha$$

$Df(x_0) = \alpha, \ \forall x_0$

Es Calcoliamo la derivata di $f(x) = |x|$

Distinguiamo $x_0 > 0$, $x_0 < 0$, $x_0 = 0$

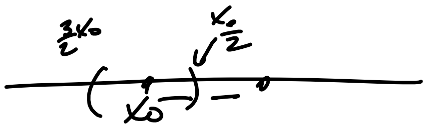


Se $x_0 > 0 \quad \dfrac{|x|-|x_0|}{x-x_0}$

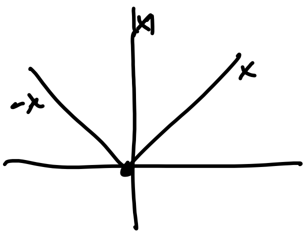
possiamo prendere $x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ dove δ_0, $x_0 - \delta_0 > 0$.

$$= \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \Rightarrow (D|x|)(x_0) = 1, \quad x_0 > 0$$

Se $x_0 < 0$ e $x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subseteq (-\infty, 0)$



$$\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \frac{-x-(-x_0)}{x-x_0} = -1, \quad (D|x|)(x_0) = -1$$

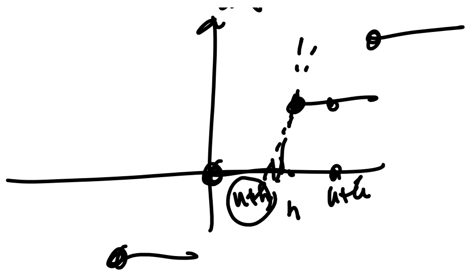


$$D_+|x|(0) = 1 \neq -1 = D_-|x|(0)$$

$\Rightarrow$ la derivata in 0 non $\exists$

$|x|$ non è derivabile in 0

Calcolare $[x]'$ $\quad$ (derivata di parte intera di x)



se $n < x_0 < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow [x]' = 0$

Oss. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{h = x-x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$h>0$, $\lim_{h \to 0^+} \frac{[n+h]-[n]}{h} = \frac{n-n}{h} = 0$

$h<0$ $\lim_{h \to 0^-} \frac{[n+h]-n}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{n-1-n}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{h} = +\infty$

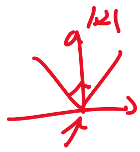
0 è una discontinuità essenziale della derivata

Oss Se f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f è continua in x_0

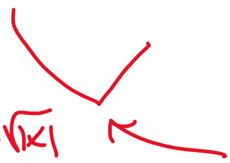
$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = 0$$

ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nota $|x|$ è cont. in $x_0 = 0$ ma non è ivi derivabile



punto angoloso



$\sqrt{|x|}$

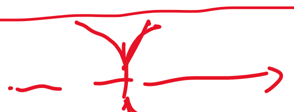
angoloso

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

Definizione

Sia f continua in x_0.

CUSPIDE



Se $\exists$ le derivate $D_\pm f(x_0)$ ma $D_+ f(x_0) \neq D_- f(x_0)$ oppure

oppure $\exists$ una derivata laterale e l'altra è $\pm\infty$

/ x_0 si chiama PUNTO ANGOLOSO

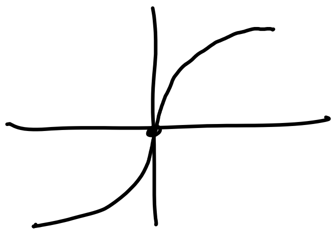
se $D_+ f(x) = +\infty$, $D_- f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ x_0 è una cuspide

---

Es. Calcolare la derivata in 0 di $x^{\frac{1}{3}}$ (dom è $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$



Rivediamo i limiti notevoli in $x_0 \in \mathbb{R}$

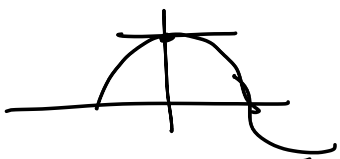
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = (D e^x)(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = (D \lg(1+x))(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = (D \sin x)(0)$$

$(D \cos x)(0) = ?$. $\displaystyle\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$(D\cos x)(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0.$$



Es. Calcolare $(D e^x)(x_0)$, $\forall x_0$

$\lim_{h\to 0} \frac{\quad}{h} \quad \uparrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{\quad}{h}$

prop. dell'esp. + alg dei limiti

$$\boxed{(e^x)'(x) = e^x}$$

$f(x) = a e^x$ sono tutte e sole le funzioni t.c. $f' = f$.

(da dimostrare) ci ritorneremo alla fine del semestre

Es. $\boxed{D \log x = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0}$

$$x>0, \quad \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} =$$

$$= \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{\left(\frac{h}{x}\right)} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right)} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} (\quad) = \lim_{k\to 0} \frac{\log(1+k)}{k} = 1$$

$k = \frac{h}{x}$

Es $\boxed{D \sin x = \cos x}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1} = \cos x$$

Analog.

$$\boxed{D \cos x = -\sin x}$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

DEF. $\sinh x$ = seno iperbolico di $x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x$ = coseno " " $:= \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

Es (!) Dimostrare che

$\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$

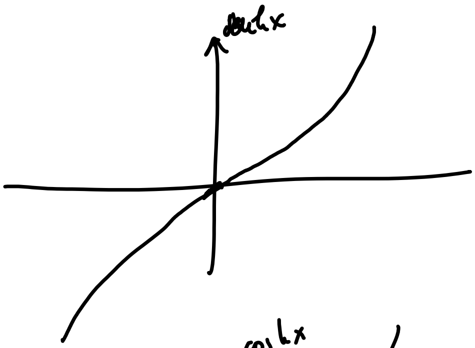
sinh è dispari

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

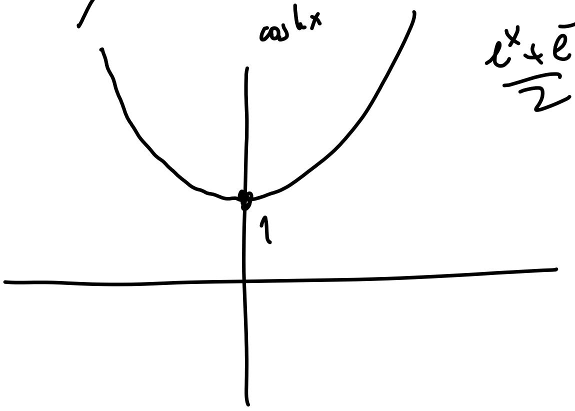
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

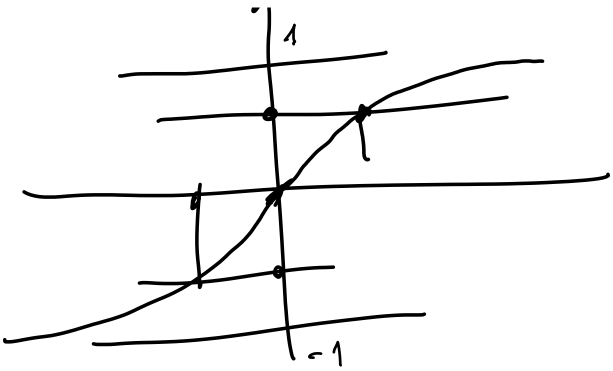


$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ dominio è $\mathbb{R}$.



$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

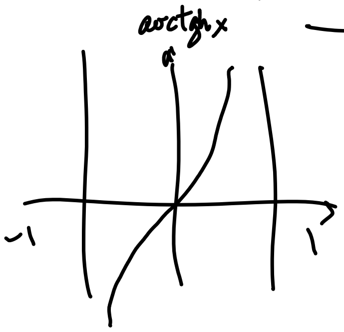
tgh x



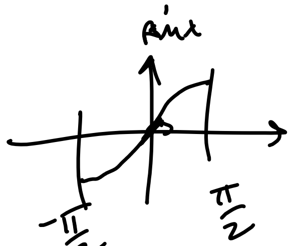
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

tgh x è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $(-1,1)$

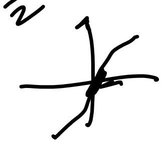
ossia è una funzione derivabile e invertibile



Es Calcolare la $D(\arcsin x)(0)$

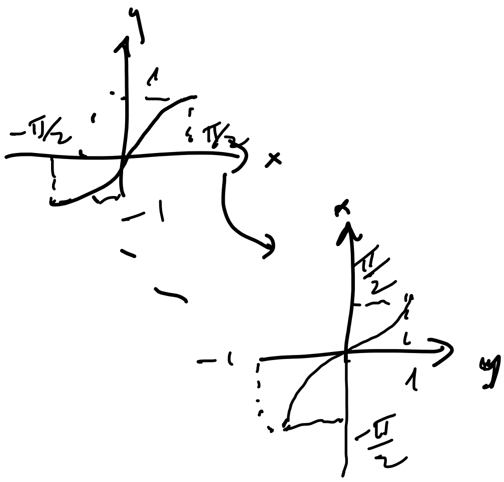


$$\lim_{h\to 0} \frac{\arcsin h}{h} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$



$y = \arcsin h$

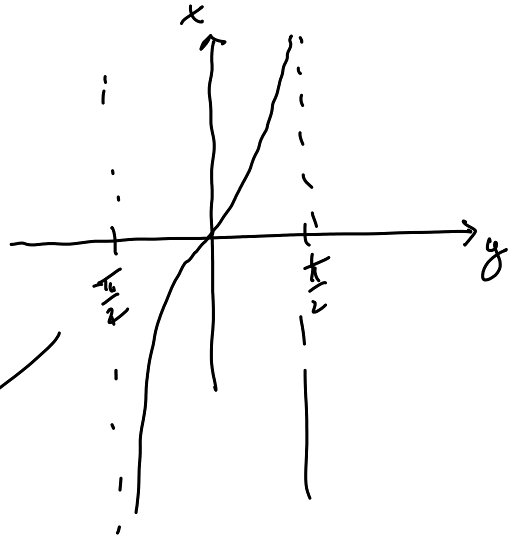
$\sin y = h$

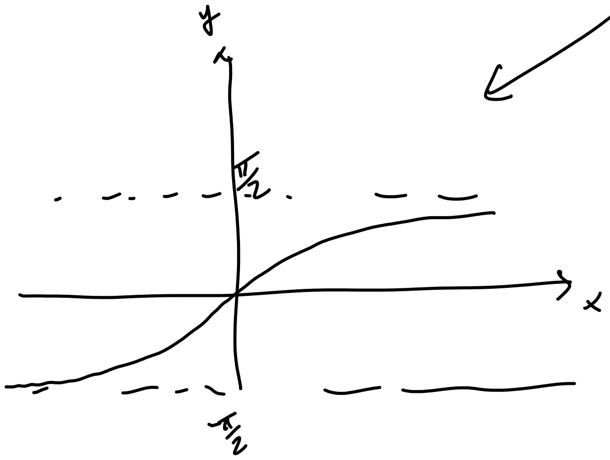


Derivata di $\arctan x = y$

$\Updownarrow$

$\tan y = x$





Oss. Se f è dispari ($f(-x) = -f(x)$) e invertibile $\Rightarrow$ f^{-1} è dispari

Regola di derivazione funzione inversa

$y = y(x)$ con inversa $x = x(y)$

$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{x'(y(x))}$ ← x' calcolata in $y(x)$

$(x' \circ y)(x)$

($\boxed{x(y(x)) = x}$ ← $x \circ y = id$ derivo rispetto ad x

funzione variabile indipendente

$x' \circ y \cdot y' = 1$

$y' = \frac{1}{x' \circ y(x)}$)

$D \arctan(x) = \frac{1}{(D_y \tan)(y(x))} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$

D_x

$\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)' = \frac{1}{\cos^2 y}$

$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$

$y = \arctan x \iff \boxed{x = \frac{\sin y}{\cos y}} \Rightarrow x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$

$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 y}$

$$\boxed{D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}}$$

[D] 396 $\quad y = e^x \arcsin x$

$$\boxed{D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Regola di Leibniz $\quad y' = e^x \arcsin x + e^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

Es 399 $\quad y(x) = \frac{1}{x} + 2 \log x - \frac{\lg x}{x}$

$$y' = -\frac{1}{x^2} + 2 \frac{1}{x} - \frac{1-\lg x}{x^2}$$

$$= \frac{2x + \lg x - 2}{x^2}$$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(x^{-1})' = \frac{-1}{x^2}$.

$D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

$D \lg x = \frac{1}{x}$

$\left(\lg x \, \frac{1}{x}\right)'$

$= \frac{1}{x^2} + \lg x \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1-\lg x}{x^2}$

Es 435

$$y = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$$

. Si possono prendere tante strade

$z(t) = \frac{1+t}{1-t}$, $y = z(\cos 2x)$ $\quad D y(x) = (z' \circ \cos 2x) \cdot (-2 \sin 2x)$

$z'(t) = \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)^2} = \frac{2}{(1-t)^2}$

$(1+t)'(1-t) - (1+t)(-1)$

Altra strategia

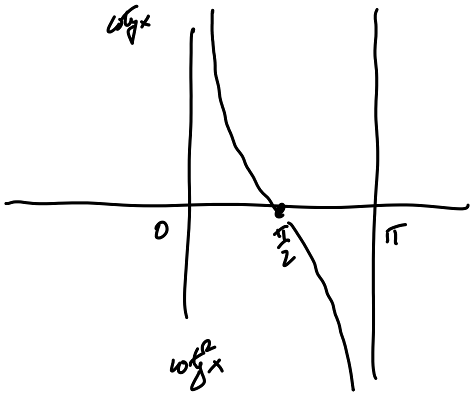
$$\boxed{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}.$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

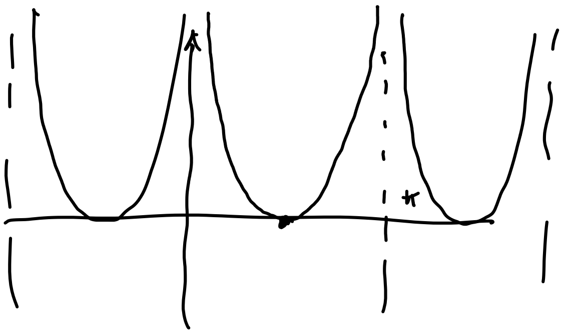
$1 + \cos^2 x - \sin^2 x \quad = 2\cos^2 x$

$1 - \cos^2 x + \sin^2 x \qquad 2\sin x$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = (\cot g\, x)^2$$



$\frac{\cos x}{\sin x}$



$$\frac{\cos x}{\sin x}' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$D(\cot g\, x)^2 = \underbrace{2\cot g\, x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$z(t) = t^2 \qquad (z \circ \cot g\, x)' = \underbrace{z' \circ \cot g\, x}\cdot D(\cot g\, x)$

$$= -2\,\frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

$$\boxed{\sqrt{1 + e^{\sin x^2}}}$$

$$x \xrightarrow[f_1]{(\ )^2} x^2 \xrightarrow[f_2]{\sin} \sin x^2$$

$$\xrightarrow[f_3]{e} e^{\sin x^2} \xrightarrow[f_4]{1+(\ )} 1 + e^{\sin x^2} \xrightarrow[f_5]{\sqrt{\ }} \sqrt{1 + e^{\sin x^2}}$$

$$\sqrt{1+e^{\sin x^2}} = f_5 \circ \underbrace{f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1}_{g}\,(x)$$

$$D\sqrt{1+e^{\sin x^2}} = f_5' \circ \underbrace{f_4 \circ \cdots f_1} \cdot f_4' \circ f_3 \cdots \cdot f_3' \circ f_2 \circ f_1 \cdot f_2' \circ f_1 \cdot f_1'$$

$f_5'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\qquad f_4'(y) = 1$ $\qquad f_3(y) = e^y$

$f_2'(y) = \cos y$ $\qquad f_1'(y) = 2y$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+e^{\sin x^2}}} \cdot e^{\sin x^2} \cos x^2 \cdot \cancel{2}x = \frac{e^{\sin x^2} \cos x^2}{\sqrt{1+e^{\sin x^2}}}$$

La derivata è legata intrinsecamente alla crescita/decrescita delle funzioni $\qquad R_f(y,x) \quad y \neq x$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \overbrace{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}^{R_f(y,x)}$$

$$y>x \quad \begin{cases} R_f \geq 0 \iff f(y) \geq f(x) \\ R_f > 0 \iff f(y) > f(x) \\ R_f \underset{<}{\leq} 0 \iff f(y) \leq f(x) \end{cases}$$

$y<x$ $\qquad R_f(y,x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Quindi se $f : [a,b]$ ed è crescente $\left(f(y) \leq f(x) \text{ se } y<x \right)$

strettamente cresc $\quad f(y) < f(x)$ se $y<x$

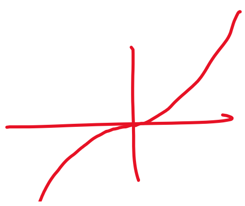
$$\iff \boxed{R_f(x,y) \geq 0, \ \forall\, x \neq y}$$

Teorema (i) Se f è crescente e derivabile su $[a,b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$

e "analoghe" le altre affermazioni (ii) f decresc $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

(iii)* f strett cresc. $\not\Rightarrow f' > 0$

Es $\quad x^3$ è strett. cresc. su $\mathbb{R}$



$D\, x^3 = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$

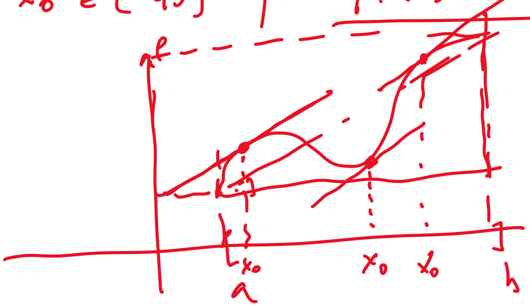
NB $\boxed{f(x) > \alpha \quad \forall x \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \geq \alpha}$ (se esiste)

$f(x) = 1-x^2$, $1-x^2 > 1$, ma $\lim_{x\to 0} 1-x^2 = 1$.

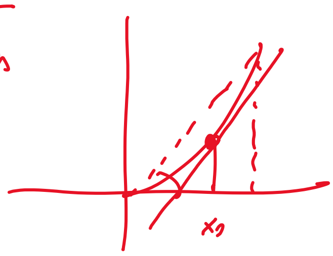
Teorema del valor medio (Lagrange)

f cont su $[a,b]$, derivabile in (a,b). Allora

$\exists \; x_0 \in (a,b) \mid \boxed{f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)}$



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$



Se $f' \geq 0$ su $(a,b) \Rightarrow f$ è strett crescente.

$x<y$ in (a,b) applico Lagrange a $[x,y]$

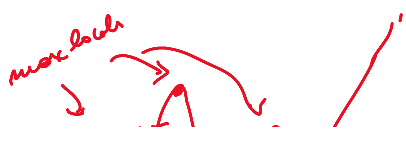
$f(y) - f(x) = (y-x)\, f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$.

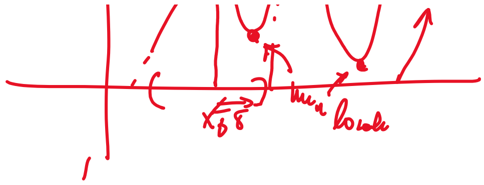
Studio dei massimi/minimi di una funzione

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_0 è un MASSIMO GLOBALE (MIN) di f se $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$ ($\leq$)

x_0 è un MASSIMO LOCALE se $\exists\, \delta > 0 \mid f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A$, $|x-x_0| < \delta$





Se x_0 è un max (min) locale interno o sia

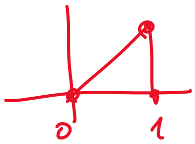
$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq A$

$$\frac{R_f(x,x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0 & x > x_0 \\ \geq 0 & x < x_0 \end{cases}$$

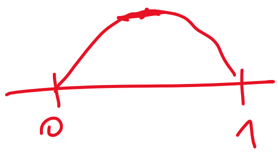
Teo (Fermat): se f è der. x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$ $\boxed{\text{CONDIZIONE NECESSARIA}}$

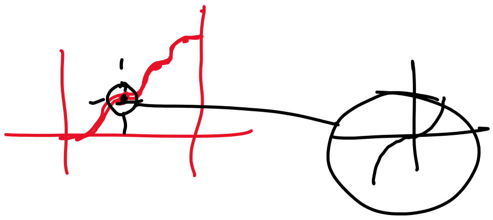
x_0 pto int. di max (min) locale.

Es. $f(x) = x$ su $[0,1]$



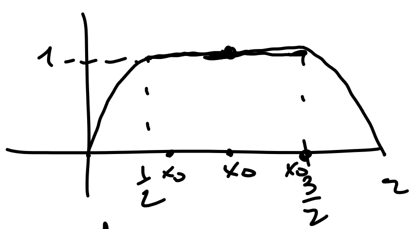
$x_0 = 1$



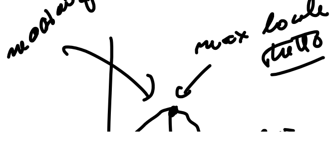


Def. x_0 è un max locale stretto

$\exists\, \delta > 0 \mid f(x_0) > f(x) \quad \forall\ x \in A,\ 0<|x-x_0|<\delta$



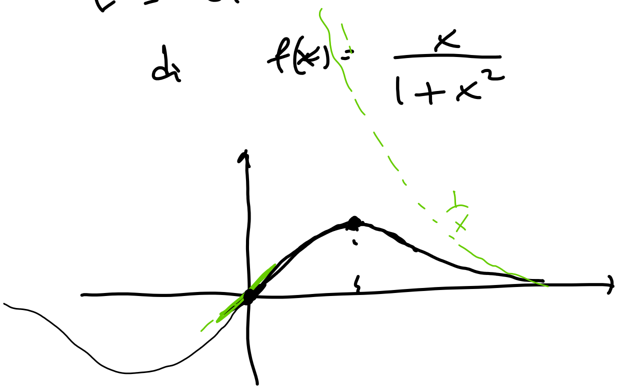
$\forall\ \frac{1}{2} \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$ x_0 è pto di max globale (non stretto)



$\frac{\pi}{2}$ minimo locale stretto

[E] 849 Determinare massimo/minimo assoluti (o globale)

di $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ f è dispari



$f > 0$ per $x > 0$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$

$f(x) \sim x$ vicino a 0

$f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ vicino a $+\infty$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad) \ \frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} 0 & \iff x = \pm 1 \\ >0 & -1 < x < 1 \\ <0 & |x| > 1 \end{cases}$$

1 è un punto di max globale stretto ($f(1) = \frac{1}{2}$

-1 " min " " $f(-1) = -\frac{1}{2}$

per $x \in (0,1)$ f è strett. cres. parte da $0 = f(0)$

e arriva a $f(1) = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} > f(x)$ $\forall x \in (0,1)$

$x > 1$ f è strett. decre. $f(x) < \frac{1}{2}$ $\forall x > 1$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ è max globale.

OSS. $[a,b]$ f cont. in $[a,b]$ e deriv.

il max può essere o in a o in b o

nei punti interni dove si annulla la derivata

Tabella 7.1 Derivate elementari. I è il dominio della funzione $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	I	$f'(x)$
const	$\mathbb{R}$	0
$x^n, \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$	$\mathbb{R}$ ($\{x \neq 0\}$ se $n < 0$)	$n\, x^{n-1}$
$x^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$	$\mathbb{R}_+$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
a^x	$\mathbb{R}$	$\log a \cdot a^x$
$\log\lvert x\rvert$	$\{x \neq 0\}$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\{x \neq 0\}$	$\dfrac{1}{x \log a}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$	$\{x > 1\}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotan} x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{Arcsen} x$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsen} x$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Arccot} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Lezione 15 25-10-21

lunedì 25 ottobre 2021 08:18

Es Calcolare usando la definizione la derivata di

$$D\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{y\to x}\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{y-x} = (Df)(x) = f'(x) \quad \text{dove } f(t)=\frac{1}{t}$$

$$x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x}, \quad x\neq 0$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x\cdot h} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{h}}{x\,(x+h)\,\cancel{h}} = -\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)} =$$

$$\boxed{D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}}$$

$$D x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

Derivate che conosciamo

1) $D\, x^{-1} = -1\, x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

2) $D\frac{1}{g} = -\frac{g'}{g^2}$ $\quad (g(x)=x)$

Es. $D\sqrt{x} = D x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Ora, usiamo la definizione $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Fare tanti esercizi di questo tipo!

$f: I=(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile su I

$\forall\, x \mapsto Df(x) = f'(x)$ nuova funzione con dominio I

Derivate successive

D f' se $\exists$ diciamo derivata seconda di f

e la denotiamo con $f''(x)$ o con $D^2 f(x)$ o $\frac{d^2 f}{dx^2}$

e così via.

In generale, iterativamente definiamo le derivate di ordine k

se è definita $f^{(k-1)}(x) = D^{k-1} f(x) \Rightarrow$

$$D^k f(x) = (D^{k-1} f)'(x)$$

Se f è derivabile k volte in I e $D^k f$ è continua in I

diremo che $f \in C^k(I)$ (di classe C^k di I)

ossia $C^k(I) = \{ f : I \to \mathbb{R}$ che sono derivabili k volte con derivata k-ma continua su $I \}$

N.B. $f(x) = x\sqrt{|x|}$, $I = \mathbb{R}$

$f'(x) = \mathrm{sgn}(x) \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$ $\qquad f' \in C(\mathbb{R})$

$\mathrm{sgn}(x)$ è cont in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e in 0 ha un salto

$f'(0) = 0$

$$f \in C^\infty((0,+\infty)) \cap C^\infty((-\infty,0))$$

$$[\, f \in C^\infty(I) \Leftrightarrow f \in C^k(I), \forall k \,].$$

$$f = \begin{cases} x^{3/2}, & x > 0 \\ (-x)^{3/2}, & x < 0 \end{cases}$$

Es Calcolare $D^3 (-x)^{3/2}$ $\quad x < 0$

$$D(-x)^{3/2} = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}(-1) = -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$D^2(-x)^{3/2} = -\frac{3}{2} D(-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$D^3(-x)^{3/2} = \frac{3}{2^2}\, D(-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2^3}(-x)^{-\frac{3}{2}}$$

A noi interesserà soprattutto la derivata prima e seconda

crescita/decrescita — curvatura del grafico

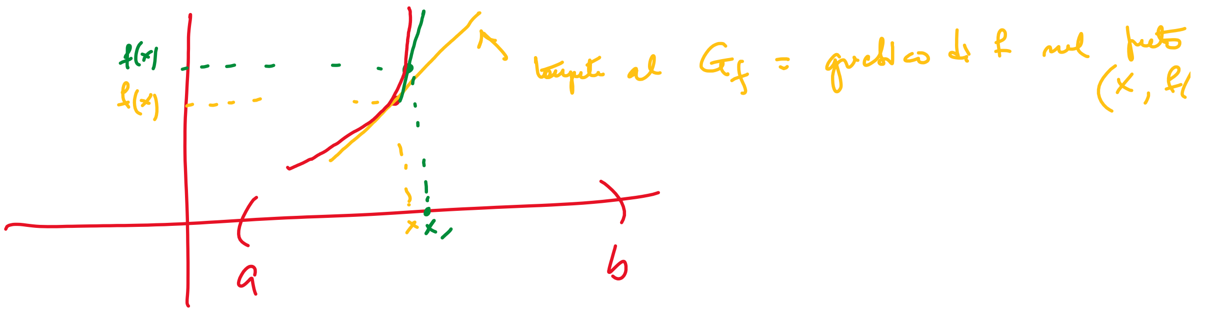
Def $f: I=(a,b)$ di classe $C^2(I)$ si dice (strettamente) convessa se

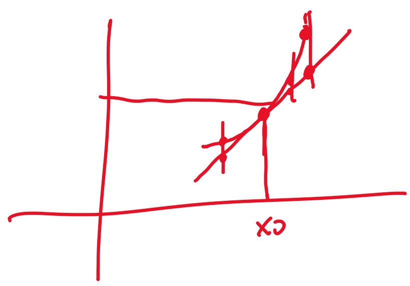
$f'' \geq 0$ su I

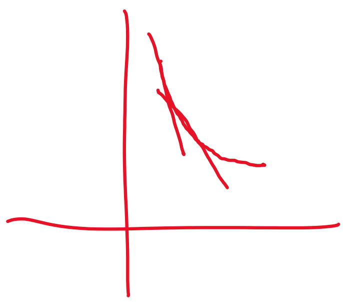
$(f'' > 0)$

f si dice (strett.) concava se $-f$ è (strett.) convessa

Se f è strett. convessa $\Longleftrightarrow$ f' è strett. crescente su (a,b)







$$f(x) \geq \overbrace{\boxed{f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}}^{\text{retta tangente a } G_f \text{ in } (x_0, f(x_0))} \quad !!$$

$>$ (strett.)

coeff angolare di questa retta

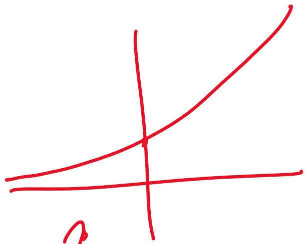
$y =$.

retta è più . $y = ax+b$

$\mathbb{R}^2 \supseteq \{x = x_0\}$ = rette p... all'asse delle ...

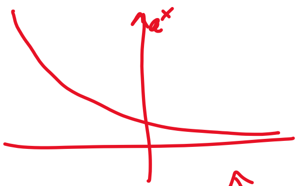
Esempio

$x \to e^x$ è convessa $\qquad De^x = e^x > 0$



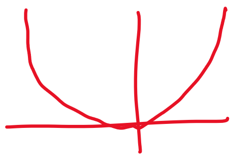
strett. crescente e strett. convessa

$x \to a^x$ è convessa ($\forall a \neq 1$)



strett. decrescente e strett. convessa

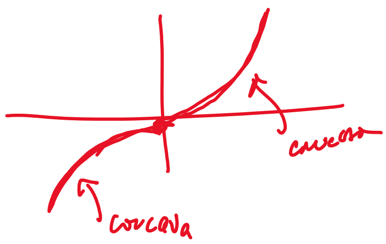
$x \to x^2$



$D^2 x^2 = 2$

$x \to x^3$ è strett. convessa su $(0, +\infty)$ $\qquad D^2 x^3 = 6x > 0$ per $x>$

è strett. concava su $(-\infty, x)$ $\qquad D^2 x^3 = 6x < 0$ per $x<$

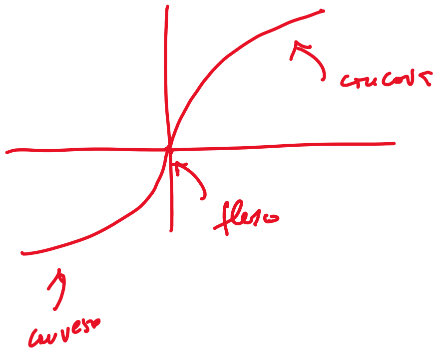


0 è un pto di FLESSO per x^3

... C^1 ... funzione $C^2(I)$ [$C^2(a,b)$] se $\exists\, \delta > 0$ |

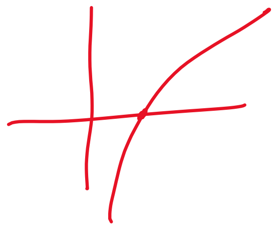
$f''(x)\, f''(y) < 0 \quad \forall\; x_0-\delta < x < x_0 < y < x_0+\delta$, $a \le x_0-\delta < x_0 \dots$

- $x^{\frac13} = \sqrt[3]{x}$, $I = \mathbb{R}$



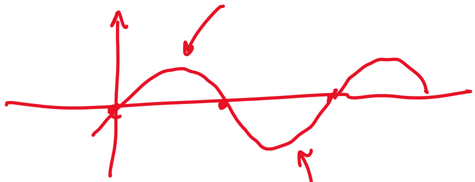
$$\left(x^{\frac13}\right)'' = \frac13\left(x^{-\frac23}\right)' = -\frac29\, x^{-\frac53} < 0 \quad \text{per } x>0$$

- $\log x$ è strettamente concava su $(0,+\infty)$



$$(\log x)'' = \left(\frac1x\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall\, x>0.$$

- $\sin x$ è strettamente concava su $(0,\pi)+2k\pi$



$$(\sin x)'' = -\sin x < 0 \quad \text{per } x \in (0,\pi)$$

$$(\cos x)'' = -\cos x$$

(Nota: $\sin x$ e $\cos x$ risolvono l'equazione differenziale $y''+y=0$ $\quad \ddot y + y = 0$)

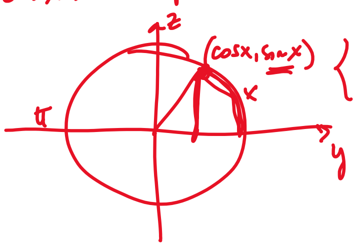
$$m\ddot y + ky = 0$$

$$m\ddot y = -ky$$

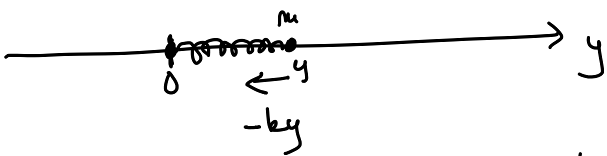
la costante di elasticità della molla

forza = massa · accelerazione

$\sin x > 0$ per $0<x<\pi$



$\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\}$ $\quad y^2+z^2=1$



Le soluzioni di questa equazione differenziale sono

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Esercizi $\ddot{y} + y = 0$

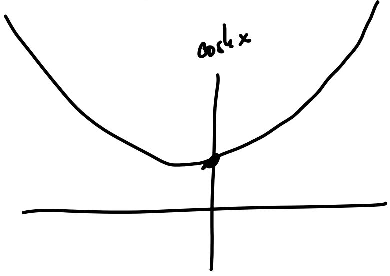
$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

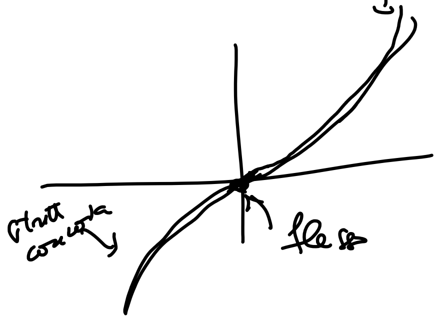
$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)'' = \sinh x$

$(\cosh x)'' = \cosh x$



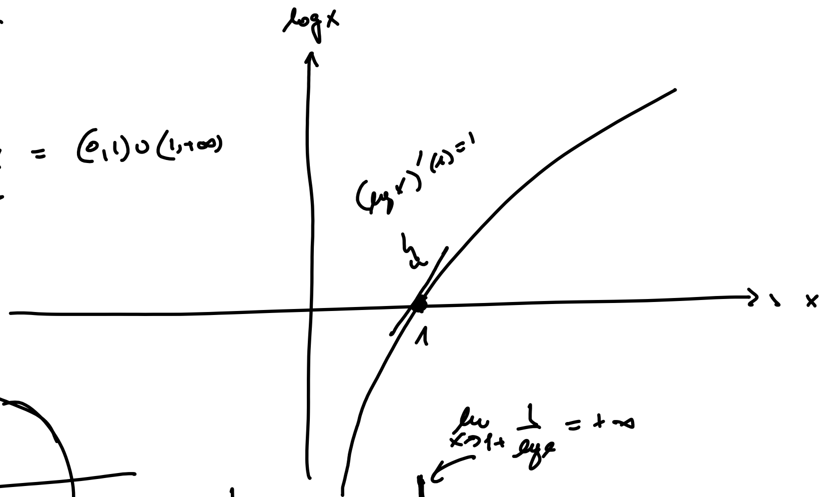
strett. convessi su $\mathbb{R}$

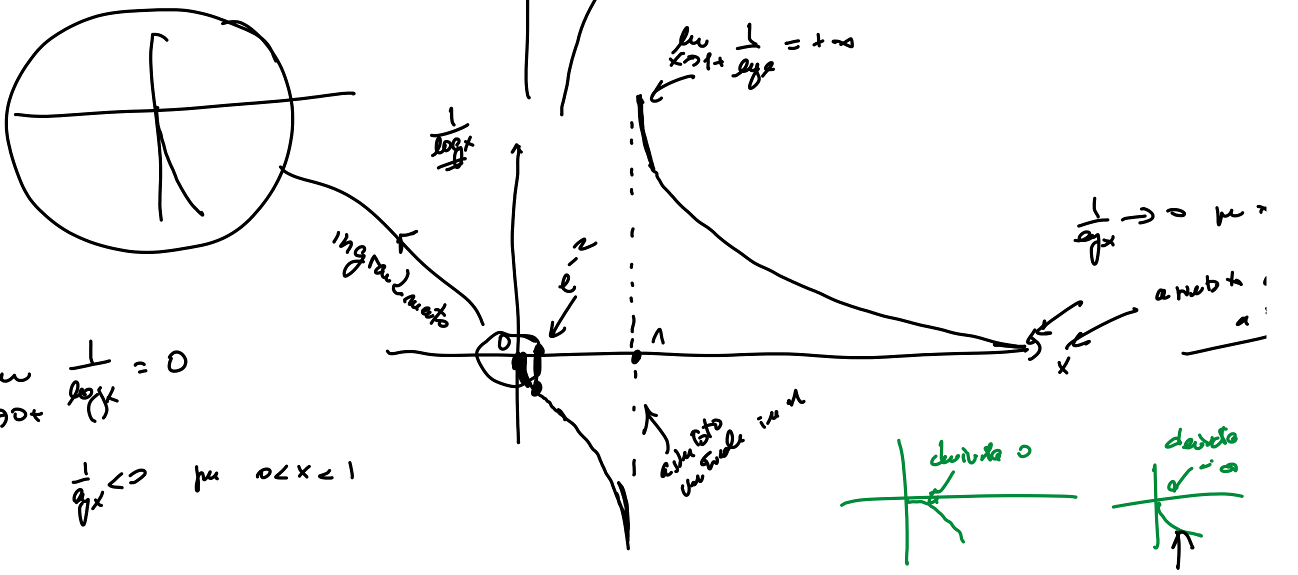


STUDIO DI FUNZIONI.

$f(x) = \frac{1}{\log x}$

$A = \mathrm{dom}\, f = (0, +\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, +\infty)$





$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x} = 0$

$\frac{1}{\log x} < 0$ per $0 < x < 1$

$D\, \frac{1}{\log x} = -\frac{1}{x(\log x)^2} = -\infty$ $\qquad \lim x \log^2 x = 0$

$\frac{1}{\lg x}$ è strett decrescente su $\mathring{A}$

$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\lg x)^\beta = 0 \quad , \quad \underline{\alpha > 0}$

$$D^2 \frac{1}{\lg x} = -D \frac{1}{x \lg^2 x} = \frac{\log^2 x + \cancel{x} \cdot 2 \lg x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{x^2 \log^4 x} \qquad \left(D \frac{1}{g} = - \frac{g'}{g^2} \right.$$

$$= \frac{\log x + 2}{x^2 \log^3 x}$$

$D^2 \frac{1}{\lg x} = 0 \iff \log x = -2 \qquad x = e^{-2} \qquad \underline{\text{pto di flesso}}$

$D^2 \frac{1}{\lg x} < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < e^{-2}$

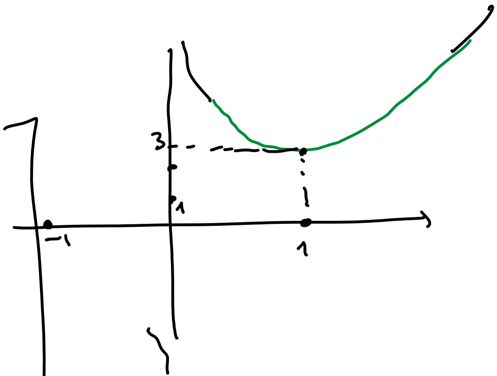
$> 0 \qquad e^{-2} < x \neq 1 \quad , \quad \forall x > 0$

Lezione 16 27-10-21

mercoledì 27 ottobre 2021 08:27

[T] 924 $\quad f = x^2 + \frac{2}{x}$ $\quad A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

Vicino a 0. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$

Se $x > 0$, $f > 0$.

$f = 0 \iff x^2 + \frac{2}{x} = 0 \iff x^3 + 2 = 0 \iff x^3 = -2 \iff x = -\sqrt[3]{2}$

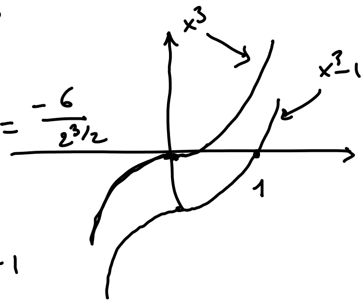
Studio $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$

$\left((-2x^{-2})' = (-2)(-2)x^{-3} = \frac{4}{x^3} \right)$

$\boxed{f'' = 2 + \frac{4}{x^3}}$

$f' = 0 \iff \underbrace{2\frac{x^3 - 1}{x^2}}_{f'} = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$

$f'(\sqrt[3]{2}) = \frac{-6}{2^{2/3}}$



$(-2^{\frac{1}{3}})^2 = 2^{\frac{2}{3}}$

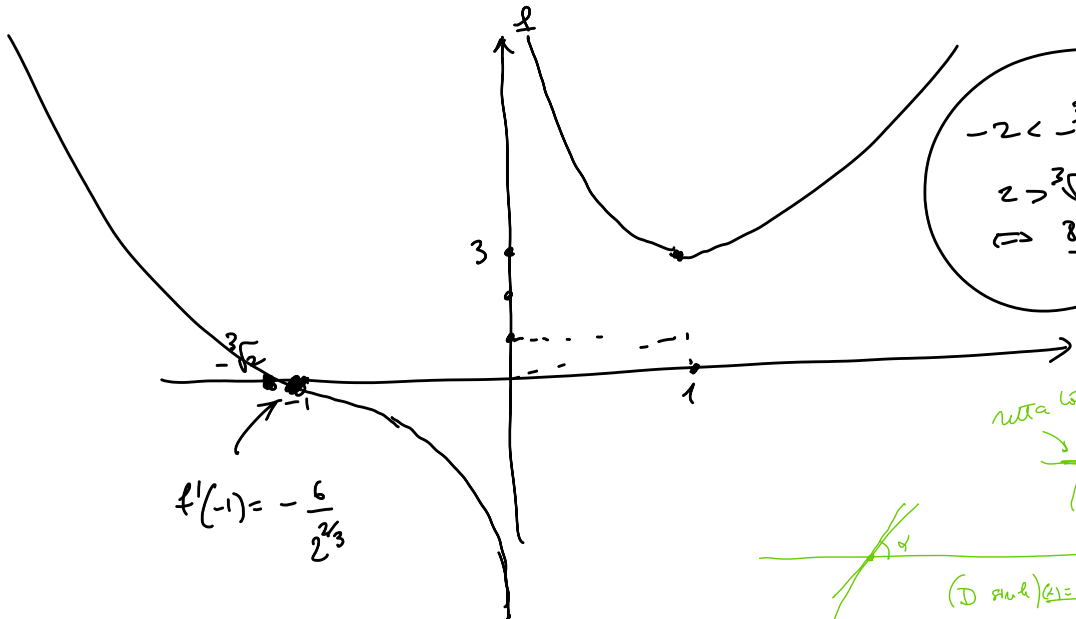
$\boxed{\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}}$

$f' > 0 \iff x^3 - 1 > 0$

$f' > 0$ se $x > 1$, $f' < 0$ se $x < 1$

f strett cres per $x > 1$ $\quad$ strett. decr per $x < 1$ $\implies$ $x_0 = 1$ è un pto di min stretto su $(0, +\infty)$ con valore 3

Per $x < 0$, $f' < 0 \implies f$ strett decres (ni min né max locali)

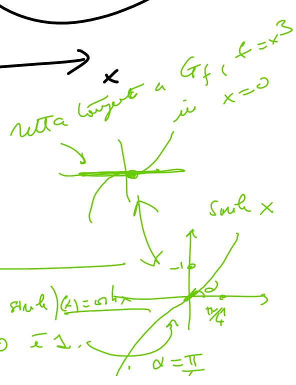


Perché

$-2 < -\sqrt[3]{2} < -1$

$2 > \sqrt[3]{2}$

$\iff 8 > 2$



$f'' = 2\left(1+\frac{2}{x^3}\right)$, $f''=0 \iff 1+\frac{2}{x^3}=0 \iff \dots$

$f''=0 \iff x^3=-2 \iff x=-\sqrt[3]{2}$

$f''>0$ per $x>0$ strett. convessa in $(0,+\infty)$

$f''<0$ strett. concava per $-\sqrt[3]{2}<x<0$

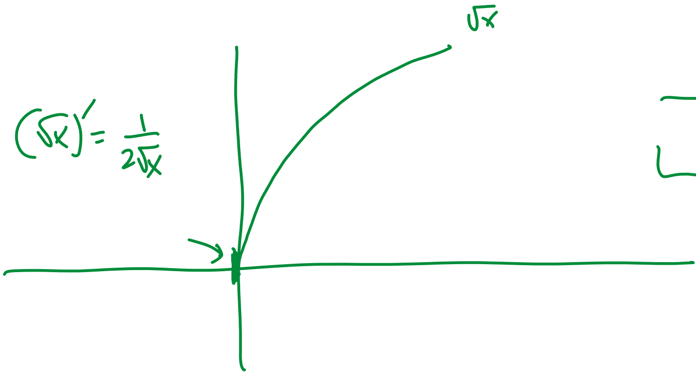
$f''>0$ " convessa per $x<-\sqrt[3]{2}$

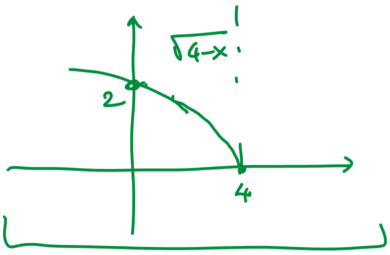
[D] 932 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

Dominio di f $x\geq 0$ & $4-x\geq 0$

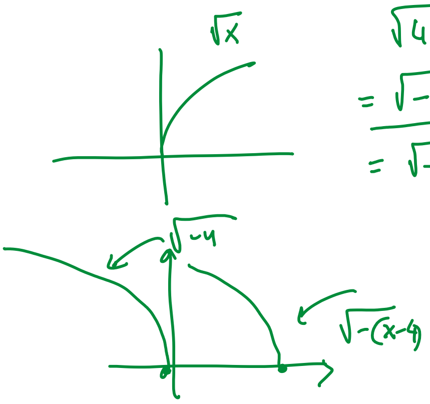
$A=[0,4]=\{0\leq x\leq 4\}$

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$





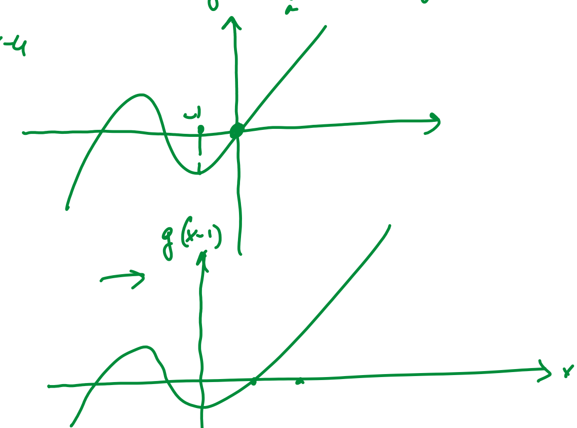
$f(x)=\sqrt{x-4}$



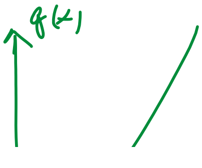
$\sqrt{4-x}$
$=\sqrt{-(x-4)}$
$=\sqrt{-y}$, $y=x-4$

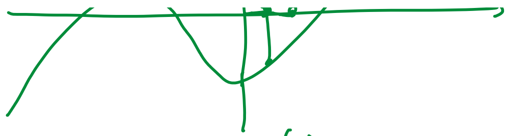
$g(x) \to g(x-x_0)$

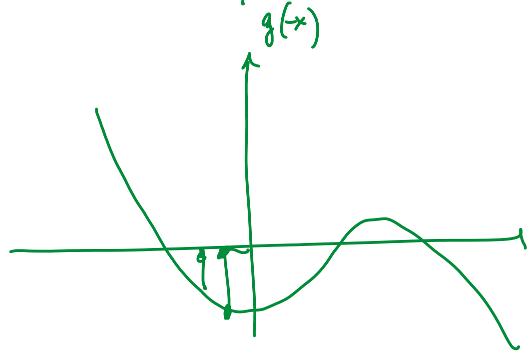
$g(x)$ $g(x-1)$ $g(x-1)$



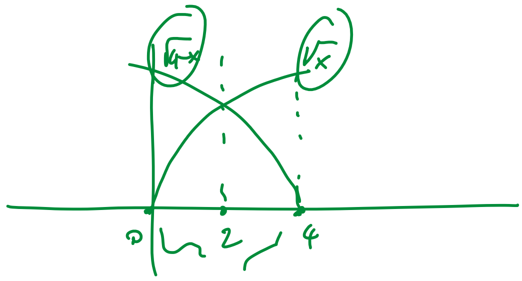
il grafico di $g(x-x_0)$ è il grafico di $g(x)$ traslato a destra di x_0





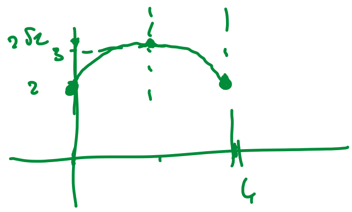


$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$



$f(0) = 2 = f(4)$

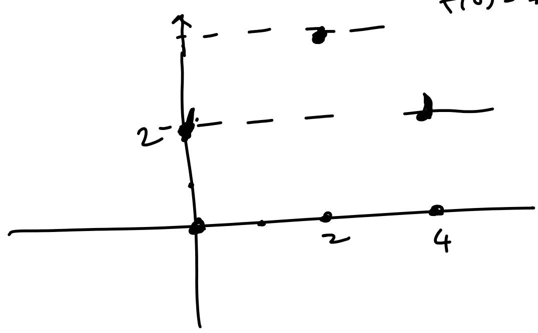
$f(2) = \underline{2\sqrt{2}}$



$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

$f(x) > 0$ su $(0,4)$

$f(0) = f(4) = 0$



$$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x(4-x)}}$$

$f' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4 - x = x \Rightarrow x = 2$ ✓

$f(2) = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ 2 è un max globale (assoluto)

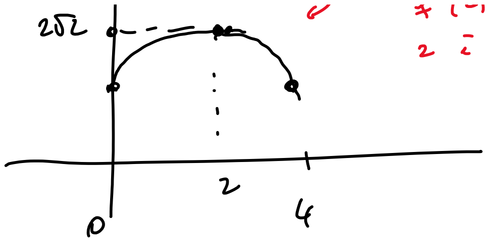
$$f'' = -\frac{1}{4x^{3/2}} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(4-x)^{3/2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4-x)^{3/2}} - \frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^{3/2}} \checkmark ,$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)' = \frac{1}{2}\left((4-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{(4-x)^{3/2}} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(4-x)^{3/2}}$$

$$f'' = -\frac{1}{4}\,\frac{x^{3/2} + (4-x)^{3/2}}{(\quad)} \leq 0 \quad \text{per } 0 < x < 4$$

$f'' < 0$



2 è un max globale

<u>Teorema 1</u> $f \in C^2((a,b))$, <u>strett. convessa</u>, $f'(x_0)=0$, $a<x_0<b$

$\Longrightarrow$ x_0 è minimo assoluto (globale) in (a,b) ed è l'unico PUNTO CRITICO o stazionario

---

Teorema 1' $f \in C^2((a,b))$ strett. concava, $f'(x_0)=0$

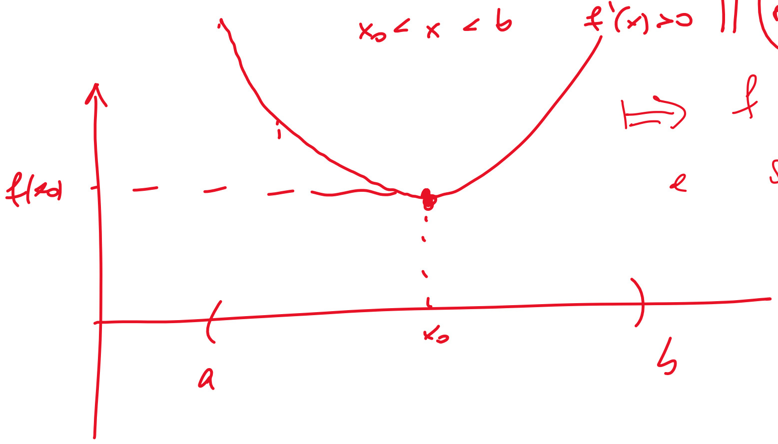
$\Longrightarrow$ x_0 è massimo assoluto in (a,b) ed è l'unico ... ($f'(y)=0$)

<u>Dim</u> $f''>0 \iff$ <u>f' è strett cresc in (a,b)</u> e $f'(x_0)=0$

$(f')'$

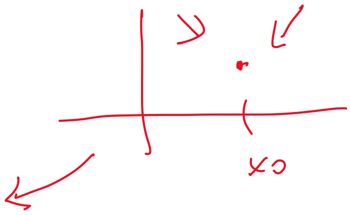
$\Longrightarrow$ $a<x<x_0$, $f'(x)<0$
$x_0<x<b$, $f'(x)>0$

$f'(x)\neq 0$ se $x\neq x_0$



$\Longrightarrow$ f strett. decresc. per $x<x_0$

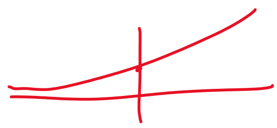
e strett. crescente per $x>x_0$



$\Longrightarrow$ x_0 è un min <u>assoluto strett</u>

Naturalmente ci sono funzioni strett convesse senza punti critici

ad esempio e^x



$(e^x)'=e^x>0$

<u>Teorema 2</u> (Teorema della permanenza del segno)

f è cont in A e $f(x_0)\neq 0$ $(x_0\in A)$.

Allora, localmente f mantiene lo stesso segno di $f(x_0)$

cioè $\exists\ \delta>0 \ \big|\ f(x)f(x_0)>0,\ \forall\ x\in A$ e $|x-x_0|<\delta$,

$y,z\neq 0$
$y\cdot z>0$
$\Longrightarrow$ y e z hanno lo

Dim. Esercizio! [Sugg. usare la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$]

Teorema 3 $f \in C^2((a,b))$, e $x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.

Allora, x_0 è un minimo locale stretto

Dim f'' è cont in x_0 per P.d.S. (Teorema 2) $f'' > 0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ per un qualche $\delta > 0$ suff. piccolo

e ora applico il Teorema 1 a f su $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. ■

Asintoti obliqui

DEF. f ha un asintoto obliquo in $+\infty$

$\Longleftrightarrow \exists\, a \neq 0$ e $b \mid f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

[analog. asint. obliquo in $-\infty$]

Quindi $$\frac{f(x) - (ax+b)}{ax} \to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{ax} - 1\right) + \frac{b}{ax} \to 0 \implies \frac{f(x)}{ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \Longleftrightarrow \boxed{f(x) \sim ax} \text{ per } x \to +\infty$$

ed inoltre

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$$

Es $$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$ ha asint. obliquo in $\pm\infty$

$$= \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x(1-\dots)} \sim \frac{x}{2} \text{ per } x \to \pm\infty$$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{x^2+1}{2x-1} - \frac{x}{2} = \frac{2(\cancel{x^2}+1) - 2\cancel{x^2}+2x}{(2x-1)\,2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\,(1+x)}{\cancel{x}\,(2x-1)} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{1}{2}$$

$\frac{x+1}{2}$ è un asint. obliquo a $\pm\infty$

finire lo studio di funzione

Es 1 Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\{a_k\} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{DEF}{=} \begin{cases} a_1, & n=1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n, & n \geq 2 \end{cases}$$

↑ sommatoria

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\boxed{\sigma_n = \begin{cases} a_1 & n=1 \\ \sigma_{n-1} + a_n, & n \geq 2 \end{cases}}$$

Esempio $a_k = \frac{1}{k}$

$\sigma_1 = 1$ $\qquad \sigma_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \sigma_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\qquad \sigma_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad (*)_n$$

Base induttiva $\qquad n=1 \qquad \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$(*)_1$ è vera.

Nel nostro esercizio $\sigma_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$

Dimostriamo che $(*)_n \Rightarrow (*)_{n+1}$:

$$\sigma_{n+1} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}}_{\sigma_n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \overset{(*)_n}{\geq}$$

$$\boxed{\sigma_n \geq 1 + \frac{n}{2}}$$

$$1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \overset{?}{\underset{(*)_{n+1}}{\geq}} 1 + \frac{n+1}{2}$$

$$\iff \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\sigma_n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{Quanti sono questi termini?}}}_{\sigma_{n+1}}$$

$k \ \ | \ \ 1 \leq k \leq 2^{n+1}$ $\qquad \# \{k \mid 1 \leq k \leq N\}$

$$\#\{k \mid 2^n+1 \le k \le 2^{n+1}\}$$ numero di termini in questa

$$= 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$$

$a_k \ge b_k$, $M \ge N$

$$\sum_{k=N}^{M} a_k \ge \sum_{k=N}^{M} b_k$$

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$\boxed{\sum_{k=N}^{M} a = (M-N+1)a}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\underset{M}{2^{n+1}} - \underset{N}{(2^n+1)} + \underset{1}{1}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{5} a = \overset{k=2}{a} + \overset{k=3}{a} + \overset{k=4}{a} + \overset{k=5}{a} = 4a$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\underbrace{2^{n+1} - 2^n}_{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \checkmark$$

$$\sum_{k=2}^{5} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$a_k = a \quad = 4a$$

Abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \ge 1 + \frac{n}{2}}$$

$$\# \{\overbrace{N \le k \le M}^{k \in \mathbb{N}}\} = M - N + 1$$

Es dimostrare per induzione su $M \ge N$

Base induttiva $M = N$

$$\# \{M \le k \le M\} = 1$$

.....

Faccio il lim per $n \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \infty$$

serie ARMONICA

$$\frac{1}{k} \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty$$

Per def. $\forall M > 0 \; \exists N \;\Big|\; \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > M$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > M$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

$\forall N' \geq N$

$$2^{200} = 2^{20\cdot 10} = (2^{10})^{20} = (1024)^{20} \sim 10^{3\cdot 20} = 10^{60}$$

$$= 1\underbrace{0000\ldots 0}_{60 \text{ zeri}}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > 100$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > 1+\frac{n}{2} = 101 \quad \text{cioè} \quad n=200$$

$$\sum_{k=1}^{2^{200}} \frac{1}{k} > 101 \qquad 2^{200} \text{ termini}$$

$$\boxed{2^{200} > 10^{60}}$$

$$N = 2^n \qquad \boxed{n = \log_2 N.}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > 1 + \frac{\log_2 2^n}{2} \rightsquigarrow \boxed{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{\log_2 N}{2}}$$

$$\zeta(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

DEF. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} =: \zeta(s)$

= funzione zeta di Riemann calcolata in s

$\boxed{s \in \mathbb{C}}$

Teorema: I numeri primi sono infiniti.

def $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, che è "divisibile" solo per se stesso e 1.

$p = kn$ con $k, n \in \mathbb{N}$

1 non è numero primo.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Dimo di Euclide: per assurdo supponiamo che i numeri

$$2 = p_1 < \underset{\overset{\|}{3}}{p_2} < \dots < p_N$$

$p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1 > p_N$ $\quad$ p dovrebbe essere un numero non primo

$$\frac{p}{p_i} = \underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdots \cancel{p_i} \cdots p_N}_{\in \mathbb{N}} + \frac{1}{p_i}$$ che non è un numero naturale $p_i \geq 2$

$0 < \frac{1}{p_i} < 1$

Contraddizione!

Un algoritmo

$k \to p_k$ con effetto

Se conosciamo

$p_1 - p_N$

ovvero i primi N numeri primi.

$p_1 \cdots p_N + 1$

$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$

$\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{30} \cdot 7 + 1 = 211$

$30 \cdot 7$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$

$\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}_{} + 1 = 30031$

$= 59 \cdot 509$

tutti i numeri primi $\leq N$

$p_1, \dots, p_N$

p numero più grande conosciuto al momento.

---

2 ES Dim per induzione

$$(*)_n \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \frac{1}{n^2}$

$\underbrace{\quad k=1 \quad k=2 \quad k=3 \quad k=4 \quad}_{\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k^2}}$

$$(*)_1 \qquad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 = 2-1 = 2 - \frac{1}{n} \quad \text{se } n=1. \quad \checkmark$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}}_{\sigma_{n+1}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{\sigma_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{a_{n+1}} \overset{(*)_n}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1} \quad (*)_{n+1}$$

$a_k = \frac{1}{k^2}$.

$$\longrightarrow \quad 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{? \ \text{sì}}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$\iff \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\iff \quad n(n+1) \leq (n+1)^2 \quad \checkmark$$

$$\Updownarrow$$

$$n \leq n+1$$

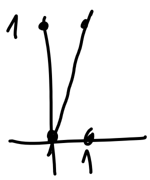
Abbiamo dimostrato che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

prendendo il limite per $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} := \zeta(2) \leq 2 < +\infty$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$f(x) = x e^{-x} \qquad A = \mathbb{R}$



$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x e^{-x} = -\infty$

$f(x) < 0$ per $x < 0$.

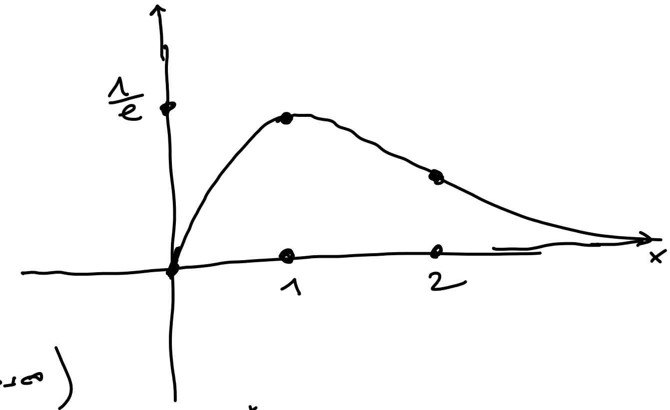
$f(0)=0$,

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = \boxed{e^{-x}(1-x)}$

$f'=0 \iff x=1$ l'unico pto critico

$\implies x=1$ è il massimo assoluto di f

(per $x<0$, $f<0$; $f(0)=0$, $f(x)\to 0$ per $x\to+\infty$)



$xe^{-x} \sim x$ vicino a 0

$f'>0$ per $x<1$
$f'<0$ per $x>1$ $\implies x=1$ è un max assoluto, ✓

$\boxed{f'(0)=1}$

$f'' = e^{-x}(x-1-1)$

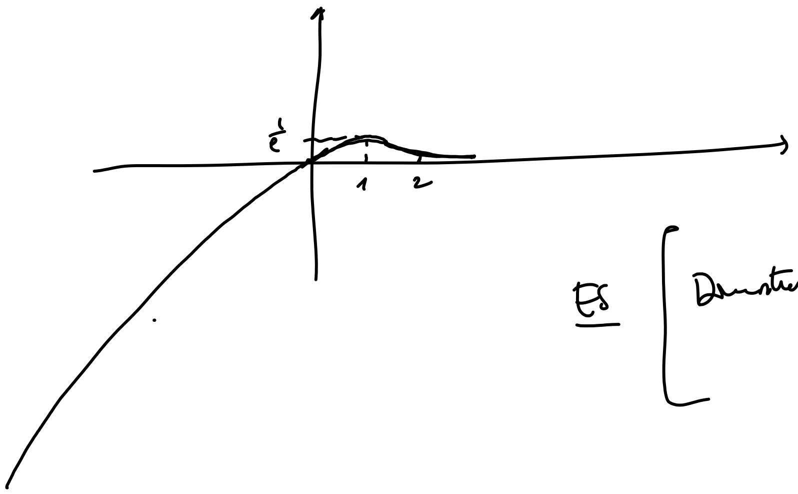
$(e^{-x}(1-x))' = (e^{-x})'(1-x) + e^{-x}(1-x)'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$= (-e^{-x})(1-x) + e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(x-1-1) = e^{-x}(x-2)$

$x>2$ f è convessa $x<2$ concava



Es [Dimostrare che $e^{x} \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$
$e^{x} > 1+x \quad \forall x\neq 0$]

Es 49, Cap. 2 [GE]

sup/inf (max/min) di

$A = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \;\middle|\; t > 2 \right\} = \mathrm{im}(f)$ dove $f(t) = \frac{t+1}{t-2}$

immagine di f   con dominio $(2, +\infty)$

$\frac{t+1}{t-2} > 1$ $t>2$ $t+1 > t-2 \iff 3>0$.

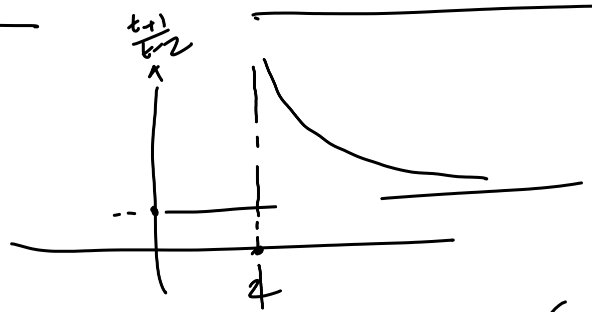
$\lim_{t \to 2^+} \frac{t+1}{t-2} = +\infty \implies \sup A = +\infty$

$\Updownarrow$ DEF

$\forall M>0 \; \exists \delta>0 \mid \frac{t+1}{t-2} > M \;\; \forall\, 2<t<2+\delta$

ossia A non ha maggiorante $\overset{\text{def}}{\iff}$ A non è limitato sup

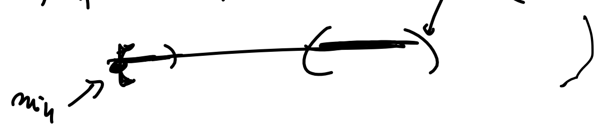
$\overset{\text{def.}}{\iff} \sup A = +\infty$



Dal grafico vediamo che

$\mathrm{im}(f) = (1, +\infty) \implies \inf A = 1$, $\sup A = +\infty$,

(esempio:



)

$\lim_{t \to +\infty} \frac{t+1}{t-2} = 1 \implies 1 = \inf A$ infatti.

$1 < \frac{t+1}{t-2}$ $\forall t \in X$, ossia 1 è un minorante

dobbiamo far vedere che 1 è il più grande dei minoranti

se $\varepsilon > 0$, $1+\varepsilon$ non deve essere un minorante

ossia deve $\exists\, t \in X \mid \frac{t+1}{t-2} < 1+\varepsilon$

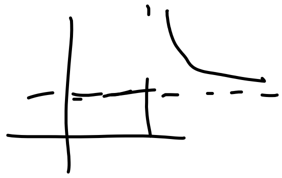
... lla definizione di limite

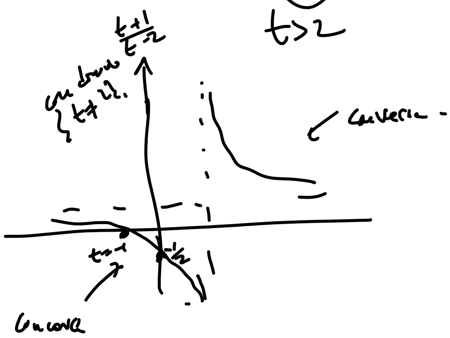
Verifichiamo il grafico

$$\left(\frac{t+1}{t-2}\right)' = \frac{(t-2)-(t+1)}{(t-2)^2} = -\frac{3}{(t-2)^2} < 0, \text{ in } X$$

$$\left(\frac{t+1}{t-2}\right)'' = -3\left((t-2)^{-2}\right)' = (-3)(-2)(t-2)^{-3} = \frac{6}{(t-2)^3} > 0$$

$\Rightarrow$ f è strett. convessa in X $t>2$





---

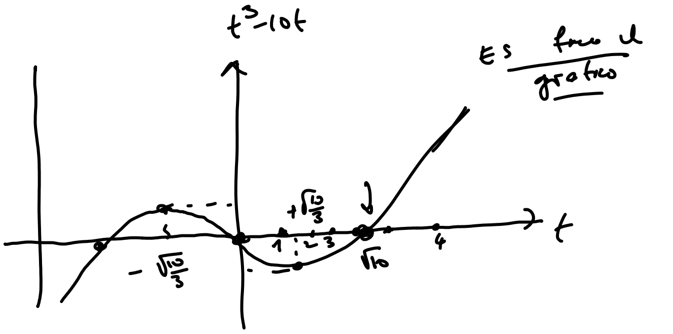
51 Cap 2

$$A = \{ x_n = n^3 - 10n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

$\lim x_n = +\infty \Rightarrow \sup A = +\infty$

$\min A = -12 = x_2$

Es faccio il grafico



$t^3-10t = t(t^2-10) = 0 \iff$ $t=0$, $t=\pm\sqrt{10}$

$(t^3-10t)' = 3t^2-10 = 0 \iff t = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$

$(t^3-10t)'' = 6t \Rightarrow$ $t=0$ flesso

$t>0$ è strett conv

$t<0$ è " concav.

$x_1 = -9$

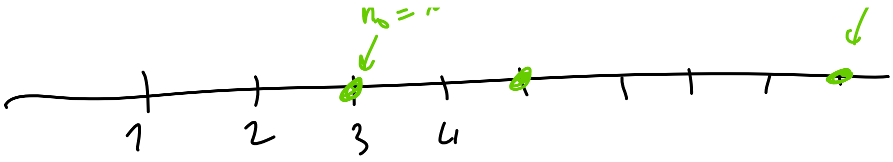
$x_2 = -12$ $\leftarrow$ min!

$x_3 = -3$

$x_n > 0 \quad \forall n \geq 4$

Teorema* (principio del minimo) $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ minimo di A cioè $\exists\, n_0 \in A \mid n_0 \leq n \quad \forall n \in A$.



Es 56 $A = \mathbb{N} \cup \{ x_n = -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\sup A = +\infty$ perché $\mathbb{N} \subseteq A$ e $\mathbb{N}$ non è limitato sup

Teorema (proprietà Archimedea di $\mathbb{N}$) $\mathbb{N}$ non è limitato superior.

$\min A = -1$ $\qquad x_1 = -1$, $\quad x_n \uparrow$ max

Es 54 $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q} \}$, $\quad -100 \in A$, $\quad -n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \subseteq A \Rightarrow \inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$

Funzioni inverse

Def $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva ($f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, $x, y \in A$; o equivalentemente $x, y \in A$ se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$)

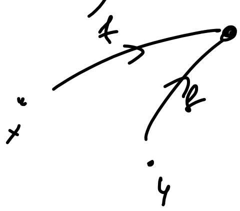
si definisce la funzione INVERSA di f

$f^{-1} : y \in \operatorname{Im}(f) := \{ y = f(x) \mid x \in A \} \longmapsto x$ dove x è l'unico t.c. $f(x) = y$

$f^{-1}(y) = x(y)$

Esempi $\log x$ dominio $(0, +\infty)$ è l'inversa di e^x con dom $\mathbb{R}$

x^2 su $\mathbb{R}$ non è invertibile $\left(-1, 1 \xrightarrow{x^2} 1 \right)$



x^2 è inv. su $[0, +\infty)$ perché in $[0, +\infty)$ $x \mapsto x^2$ è strett. crescente

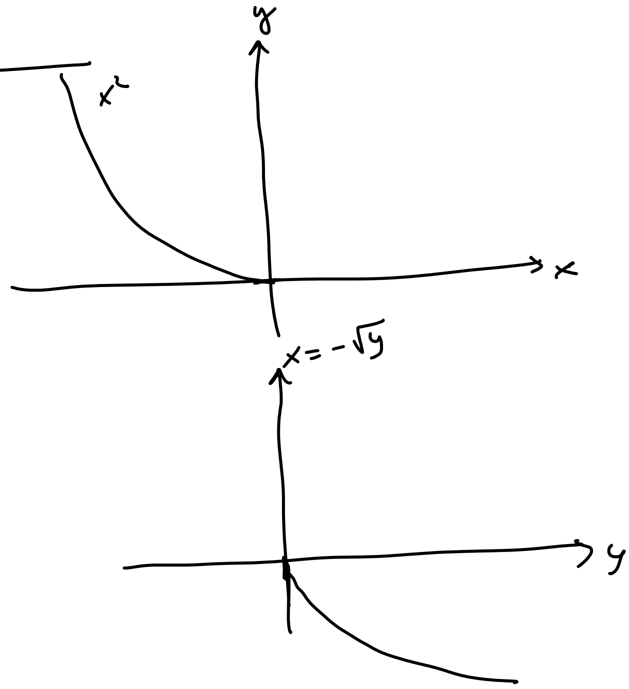
e l'inversa è $\sqrt{y}$ con dom $[0, +\infty)$

f. x^2 è strett. decresc su $(-\infty, 0]$ quindi è invertibile.

$f \doteq x^2\big|_{(-\infty,0]}$ (la restrizione su $(-\infty,0]$ di x^2)

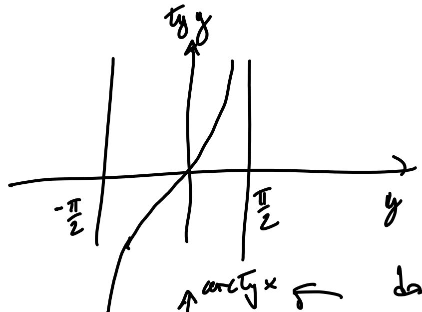
$\operatorname{im}(f) = [0,+\infty)$, $\operatorname{im}(f^{-1}) = (-\infty,0]$

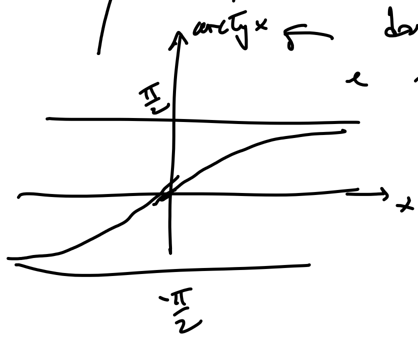
$-\sqrt{y}$ con dominio $[0,+\infty)$



[GE] cap 5 es 77-86

77 $y = \operatorname{arctg} x$

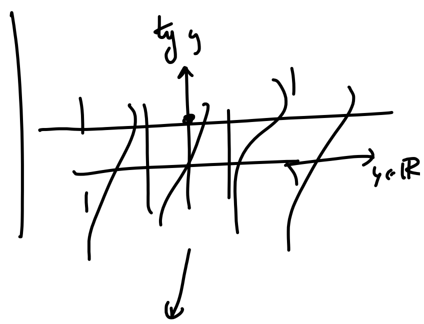


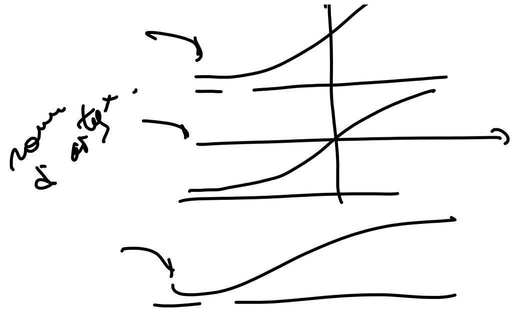


dominio è $\mathbb{R}$ e im è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

RAMO PRINCIPALE di arctg x

Risposta tg y con dominio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



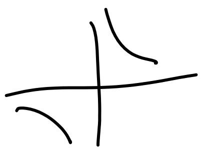


81 $f(x) = x - |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

$$= \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

[non è invertibile
$f(0) = f(1)$]

83 $y = \frac{1}{x}$ su $A = \{x \neq 0\}$ sì $x = \frac{1}{y}$ è strett. decrescente.



78* $f(x) = [x] - \{x\}$

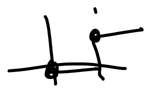
$\boxed{x = [x] + \{x\}}$

$[-2,3] = -3$

$[2,3] = 2$

parte intera di (attenzione ai simboli!)

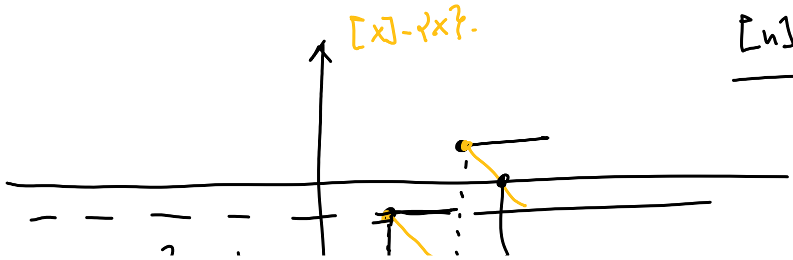
$[x] := \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$



$\{x\} := x - [x]$

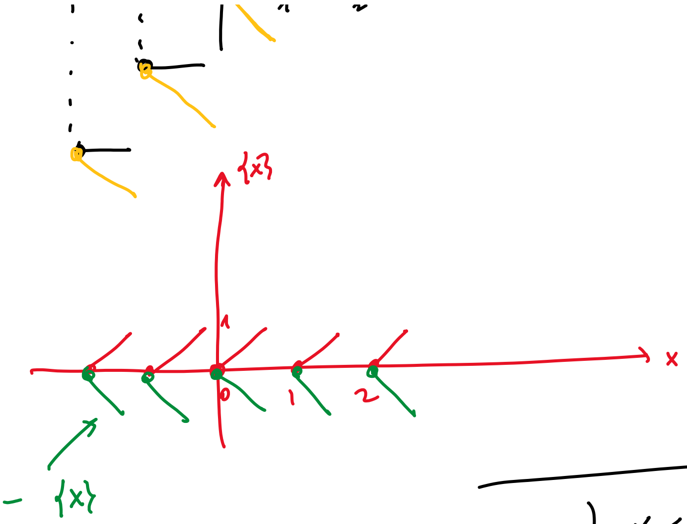
$f(x) = [x] - \{x\}$

$[n] = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$



$g(x) = [x] - \{x\}$ è iniettiva

$\Rightarrow$ è [illegible]



f^{-1} è monotona ?

$f(x)$ non è monotona

e quindi anche $f^{-1}(y)$ non è monotona

$\rightarrow$ $x<y$ | $f(x) < f(y)$

$\underline{\underline{0}<\underline{1}}$ $f(0)=0 < f(1)=1$

$\bar{x} < \bar{y}$ | $f(\bar{x}) > f(\bar{y})$

$\bar{x}=0 < \frac{1}{2}=\bar{y}$ $f(0)=0$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

Svolgere l'esercizio anche andati concetti.

Sugg. scrivere f in $\rightarrow$ $(n, n+1)$ $n\in\mathbb{Z}$ $f(n)=n$

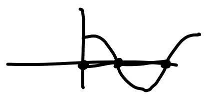
Es. 1.77 Cap 5 dire se f è cont o se può essere "resa" continua definendola opportunamente

$$f(x) = \frac{1}{1-\log|\cos x|}$$

ha dominio massimale che

$A = \{x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\}$

$0 \le |\cos x| \le 1$



e controlliamo il denominatore $\log y = 1 \iff y=e$

ma $|\cos x| \le 1 < e$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^\pm} \frac{1}{1-\log|\cos x|} \underset{y=|\cos x|}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{1-\log y} = 0$$

se definiamo $f(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$,

otteniamo una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Es. f è derivabile in $\mathbb{R}$?

Es (facile) Dimostrare che $\forall\ 1 \le k \le n \in \mathbb{N}$, $\underline{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{DEF}{=} \frac{k \quad n!}{k(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\quad n!}{(n-k+1)k!\,(n-k)!} = \frac{k \cdot n! + (n-k+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Es* FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}} \quad (*)_n$$

Dimostrare per induzione n.

Pensiamo: $(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}^{n \text{ volte}}$

$a \cdot \underbrace{\quad}_{n-1} + b \underbrace{\quad}_{n-1}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \boxed{a^k b^{n-k}}$$

non scelgo mai $a \to k=0$ b^n

scelgo sempre $a \to k=n$ a^n

$0! = 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

Facciamo: Base induttiva $n=1$

$$(a+b) \overset{\checkmark}{=} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$

$$= b + a$$

Assumiamo $(*)_n$.

$$(a+b)^{n+1} \overset{def}{=} (a+b)\,(a+b)^n \overset{(*)_n}{=} (a+b) \sum_{k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

prop. distrib. usata 2 volte

$j = k+1$

$$a \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} a c_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

proprietà distrib.

nella prima somma pongo $j = k+1 \iff k = j-1$

$0 \le k \le n \quad , \quad 1 \le j \le n+1$

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{l=1}^{N} a_l$$

$a_1, \dots, a_N$

$$\underset{k=j}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \underbrace{a^k b^{n-k+1}}_{a^k b^{n+1-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$k = n+1$ 1ª somma

$k=0$ nella 2ª somma

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)}$$

$$\sum_1^N a_k + \sum_1^N b_k$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)$$

$$\underset{\text{ass.}}{=} a_1 + \dots + a_N + b_1 + \dots + b_N$$

$$\underset{\text{comm.}}{=} a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_N + b_N$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_N + b_N)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_k + b_k$$

$$= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1}$$

fs. forma

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad ✓$$

il termine $k=0$ è b^{n+1}

il termine $k=n+1$ è a^{n+1}

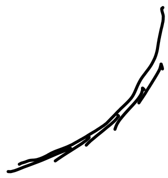
Es. Dimostrare che $e^x > 1+x \quad \forall \; x \neq 0$.

$e^x \ge 1+x, \; \forall x$

Ricordiamo la def. di funzione C^2 strettamente convessa $f(x)$ su (a,b)

$$f(x) > ax+b \quad \forall x \neq x_0$$

retta tg. al G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$



$$:= f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$\boxed{\text{Teorema } f \in C^2 \text{ è strett. convessa} \iff f''>0}$$

retta tg a G_{e^x} in $(0,1) = (0, e^0)$ è

$(x_0 = 0,\ f(x) = e^x)$ $\quad x+1$

$$(e^x)'' = e^x > 0. \implies e^x > x+1 \quad \forall x \neq 0.$$

Altra soluzione $\quad e^x \geq (x+1),\ \forall x \quad f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) > 0, \ \forall x \neq 0. \end{cases}$$

cioè 0 è un pto di minimo globale.

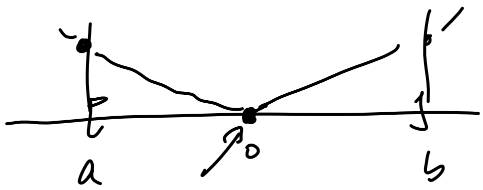
Studiamo la funzione $e^x - x - 1$

$f' = e^x - 1 \qquad f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0 \implies f \text{ è strett cresc in } (0,+\infty) \\ f'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0 \implies f \text{ è strett. decres in } (-\infty, 0) \\ \implies 0 \text{ è un minimo globale} \end{cases}$$

O ancora $\quad \lim f(x) = +\infty, \quad \lim f(x) = +\infty$

0 è l'unico punto critico.



$\Downarrow$

$\exists\ a<b$ t.c.

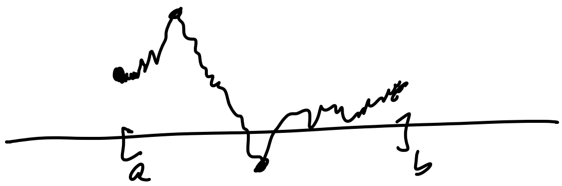
$f(x)\geq 1 \quad \forall x \leq a$,

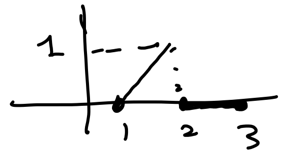
$f(x)\geq 1 \quad \forall x \geq b > a$

$a,b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$. | $a=b$

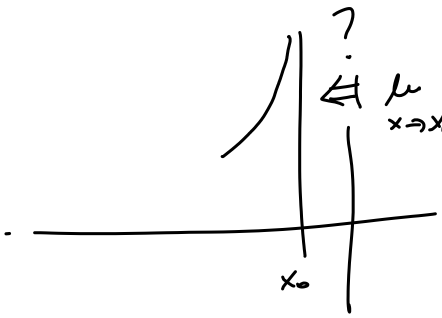
Teorema di Weierstrass f continua su $[a,b]$

ha un massimo e un minimo in $[a,b]$



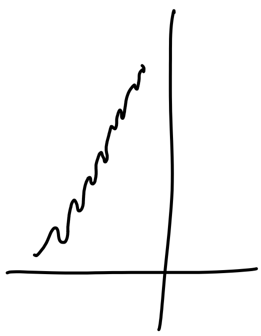


$[1,3]$



? $\Leftarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

Risp NO



$f(x) = \frac{2}{1-x} + \sin\frac{1}{1-x}$) $0 \leq x < 1$.

Ving in $x=1$

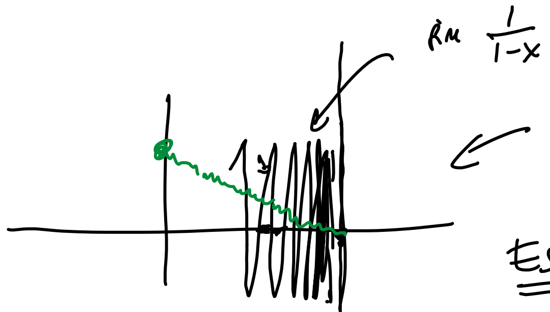
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{\quad}{(1-x)^2} \ \cdots \ \frac{1}{1-x}\,(1-x) \ \cdots \ (1-x)$$

$$= \frac{2+\cos\frac{1}{1-x}}{(1-x)^2} \geq \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$

$$f''(x) = \frac{-\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{1}{\cancel{(1-x)^2}}\cancel{(1-x)^2} + \left(2+\cos\frac{1}{1-x}\right)2(1-x)}{(1-x)^4}$$

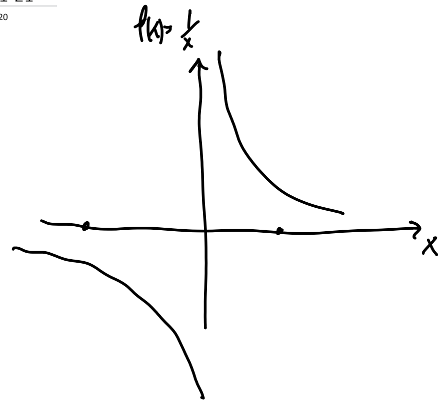
$$= \frac{2\left(2+\cos\frac{1}{1-x}\right)(1-x) - \sin\frac{1}{1-x}}{(1-x)^4}$$



f'' cambia segno ∞ volte

Es.** (AM120). dimostra.

Lezione 20 15-11-21
lunedì 15 novembre 2021 08:20



f è decrescente su $(0,+\infty)$ e su $(-\infty,0)$

Ma NON È DECRESCENTE su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Quindi f non è monotona in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall\, x \neq 0$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ricordiamo il teorema di Lagrange

$$f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

$x<y$ con $x<\xi<y$

INTERVALLO

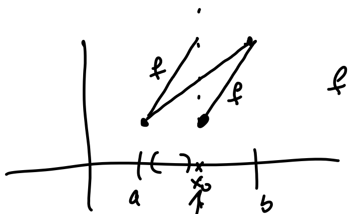
ipotesi complete: f definita su $[x,y]$ continua in $[x,y]$ e derivabile su (x,y)

$\Rightarrow \exists\ \xi \in (x,y)$

Corollario se $f'(\xi)>0 \quad \forall\ \xi \in (x,y) \Rightarrow f(y)>f(x)$

N.B. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ non è un intervallo.

Il fatto che f è continua in $[a,b]$ è necessario.



$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\quad \forall\ \xi \in [a,b]\setminus\{x_0\}$

f definita su $[a,b]\setminus\{x_0\}$

$f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$ asintoto obliquo

$f(x) \sim x$ per $x \to \pm\infty \overset{def}{\iff} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\frac{(1+x)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}}, \qquad e^{\frac{1}{x}} \to 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) \right) = 2$$

$e^{\frac{1}{x}} \to 1$

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1 \qquad \frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

SERIE NUMERICHE

Cos'è una serie? "È una somma infinita"

Data una successione di numeri (reali) $\{a_k\}$

ossia $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ ← termini della serie

Possiamo sommarli.

SOMME PARZIALI $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Studiare la serie con termini $\{a_k\}$ significa studiare la successione delle somme parziali $\{S_n\}$

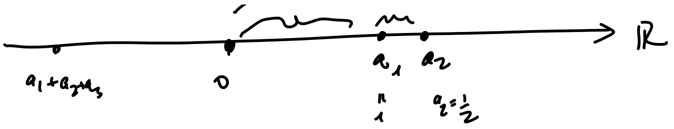
La domanda fondamentale è: converge la serie $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} S_n}$?

ossia $\exists$ il limite finito di S_n?

In generale una successione $\{S_n\}$ può:

1. non avere limite (la serie è indeterminata o irregolare)
2. può avere limite $l \in \mathbb{R}$ (la serie converge)
3. " " " $+\infty$ o $-\infty$ (la serie diverge)

Esempi $\quad a_k \quad S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$



Es. 1 $a_k = (-1)^{k-1}$

$s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$

$1 + a_2 = 1 + (-1) = 0$ (a_1)

$$s_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$\{S_n\}$ è irregolare.

Es. 2 $\{S_n\}$ divergente a $+\infty$. $a_k = 1$

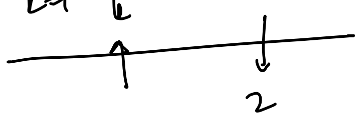
$S_n = n$

Es 3 $a_k = \frac{1}{k^2}$ $\quad \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (a $\frac{\pi^2}{6}$) ← "difficile"

Infatti abbiamo dimostrato per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n} < 2$$

esempio di serie a termini positivi



Def Una serie si dice a termini positivi se i suoi termini sono positivi

cioè $\{S_n\}$ $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $a_k > 0$

Oss. Se $\{S_n\}$ è una serie a termini positivi $\Rightarrow$ $\{S_n\}$ è strettamente crescente

Teorema Se $\{x_n\}$ è una successione monotona crescente ($x_n \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ o $\lim x_n = +\infty$ o $\lim x_n = \ell \in \mathbb{R}$

Dim. $\ell = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(Sappiamo che se ... limitato $\Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$ se $A \neq \emptyset$ è illimitato sup. $\sup A = +\infty$ per definizione)

Due casi o $\ell = +\infty$ o $\ell \in \mathbb{R}$

Caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \mid \ell - \varepsilon < x_{n_0} \leq \ell$

ma x_n è monotona crescente ossia $x_n \geq x_{n_0}, \ \forall n \geq n_0$.

Quindi $\forall n \geq n_0$

$$\ell - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \ell \overset{\text{banale}}{<} \ell + \varepsilon$$

($\ell \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\ell < \ell + \varepsilon$)

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon \iff |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

ES!! Dimostrare il caso $\ell = +\infty$.

Corollario: Serie a termini positivi o convergono (a un numero positivo) o divergono a $+\infty$.

Abbiamo anche dimostrato per induzione che

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ si chiama SERIE ARMONICA $(\zeta(1))$.

La serie armonica è divergente ossia $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$

$M > 0$ devo trovare N : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > M$.

$$\left(\Rightarrow \forall n \geq N, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > M \right)$$

n : $1 + \frac{n}{2} > M \iff n > 2(M-1)$

$N = 2^{2M}$ quindi da $(*)$ $2^{(2M)}$

$M = 10^6$ $\quad N = 2^{2\cdot 10^6} = (2^{10})^{2\cdot 10^5}$ $\quad 2^{10} = 1024.$

$> (10^3)^{2\cdot 10^5} = 10^{6\cdot 10^5} = (10^{10^5})^6$

$> 1.\underbrace{0 - - - - 0}_{100\cdot 000 = 10^5}$

Teo. Se una serie $\{S_n\}$ converge $\left(S_n = \sum_{a=1}^{n} a_k \right)$ $a_k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\lim a_k = 0$

Dim Sappiamo: $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$, $S_{n+1} \to \ell$

$a_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0 \quad (S_n := S_{n-1} + a_n)$.

CRITERIO NECESSARIO DI CAUCHY: Se $\sum a_k$ è convergente

$\Rightarrow$ $a_k \to 0$

NB. non è sufficiente !!!! (la serie armonica $a_k = \frac{1}{k} \to 0$ ma $\sum \frac{1}{k} = +\infty$)

Esempi! (SERIE GEOMETRICA)

Fisso $x \in \mathbb{R}$ (LA RAGIONE DELLA SERIE), $a_k = x^k$, $k \geq N$

esempio $x = \frac{1}{2}$ $\quad a_k = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$x = 1$ $\quad a_k = 1, 1, 1, 1, \ldots$

$$S_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

$$x\, S_n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}$$

$(1-x)\,S_n = S_n - x S_n = x - x^{n+1}$ se $x \neq 1$ $\quad S_n = \frac{x - x^{n+1}}{\ldots}$

se $x=1$ $\quad S_n = n$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} n & , \text{ se } x=1 \\ \dfrac{x-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x\neq 1 \end{cases}}$$

Ora faccio il calcolo di sopra.

$$\underline{S_n - x S_n} =: \sum_{k=1}^{n} x^k - x \sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{h=2}^{n+1} x^h = \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=2}^{n+1} x^k$$

$k+1 = h$

$$= x + \cancel{\sum_{k=2}^{n} x^k} - \cancel{\sum_{k=2}^{n} x^k} - x^{n+1} = \underline{x - x^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

se $|x|<1 \Rightarrow x^{n+1} \to 0$

se $|x| \geq 1 \Rightarrow S_n$ non converge.

$$\lim S_n = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}}$$

se $|x|<1$

se $x=1$ $\quad S_n \to \infty$ $\quad (S_n = n)$.

se $x>1$ $\quad S_n \to +\infty$ $\quad S_n = \dfrac{x^{n+1}-x}{x-1} \to +\infty$

se $x=(-1)$ $\quad S_n = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$, indeterminata

se $x<-1$ $\quad S_n$ è indeterminata e $|S_n|$ è illimitata

$$\boxed{\sum x^k \text{ converge} \iff |x|<1}$$

$x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \quad \underline{a_n > 0} \quad (\text{o } a_n \geq 0)$$

Il criterio fondamentale è il CRITERIO DEL CONFRONTO

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$0 \leq s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = t_n$$

Sappiamo che s_n e t_n sono stett. crescenti e che

quindi $\exists$ $\underline{s = \lim s_n} \overset{\text{Teo.}}{=} \sup \{ s_n \mid n \in \mathbb{N} \} \leq \underline{t = \lim t_n} = \sup\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Quindi, (1) se $t < +\infty$ $\quad (t_n \in [0, \infty))$

$\Rightarrow$ $s < +\infty$ (criterio del confronto per successioni)

Ossia se converge $\sum b_k \Rightarrow$ converge $\sum a_k$.

(2) se $s = +\infty \Rightarrow t = +\infty$ (criterio del confr. per succ.).

Ossia, se diverge $\sum a_k \Rightarrow$ diverge $\sum b_k$

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

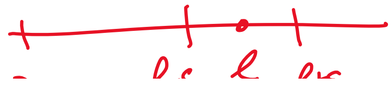
$a_k, b_k > 0$ e $\lim \frac{a_k}{b_k} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

se $\underline{\ell \in (0, +\infty)} \Rightarrow \sum a_k \approx \sum b_k$

<u>def.</u> le due serie si comportano nello stesso modo, cioè,

- o convergono entrambe
- o divergono entrambe

$$\frac{a_k}{b_k} \to \ell \in (0, +\infty)$$



$\Rightarrow$

$\exists N \mid \frac{a_k}{b_k} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \quad \forall\, k \geq N$ $\qquad 0 < l-\varepsilon \quad (1 \text{ e } \varepsilon = \frac{l}{2})$

$\frac{a_k}{b_k}$ appartiene definitivamente (per def. da un N in poi) all'intervallo $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) = (a,b)$, $0<a<b$

$a < \frac{a_k}{b_k} < b, \quad \forall\, k \geq N$

$a b_k < a_k < b\, b_k$

Quindi se $\sum a_k$ converge $\overset{C.C.}{\Longrightarrow}$ converge $\sum a b_k = a \sum b_k$

$\Longrightarrow$ converge $\sum b_k$

$\sum a_k$ diverge. $\Longrightarrow$ $\sum a_k \leq b \sum b_k \Longrightarrow \sum b_k = +\infty$

Se $l=0$ $\quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$, $\quad 0 \leq \frac{a_k}{b_k} < 1$ per $k \geq N$

$a_k < b_k \Longrightarrow$ $\sum b_k$ conv $\Longrightarrow \sum a_k$ conv

$\sum a_k$ div. $\Longrightarrow \sum b_k$ diverge

Se $l = +\infty$ $\quad \exists N \mid \frac{a_k}{b_k} > 1 \quad \forall\, k \geq N$

$a_k > b_k \quad \ldots$

CRITERIO DELLA RADICE

$a_k > 0$ supponiamo che $\exists \lim_{k\to+\infty} a_k^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \theta$

$\theta \in [0, +\infty] := [0,+\infty) \cup \{+\infty\} = \{x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$

se $\theta < 1 \Longrightarrow$ la serie converge

se $\theta > 1 \Longrightarrow$ la serie diverge

se $\theta = 1$ non si sa.

Esempi (i) $\sum x^k$ ← serie geometrica di ragione $x>0$

$a_k = x^k \qquad a_k^{\frac{1}{k}} = x$ e sappiamo la serie conv. se $x<1$

e diverge se $x \geq 1$

$\theta = \lim a_k^{\frac{1}{k}} = x.$

$a_n = \frac{\cdots}{n+3^n}$ $\sqrt[n]{\dots}$

$$= \frac{2}{3} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{n}{3^n}}} \longrightarrow \frac{2}{3} < 1$$

la serie $\sum a_n$ converge per C.d.R.

N.B $\lim \frac{a_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$ ora $a_n \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$

converge per C.C.A. con la serie $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(iii) $\sum \frac{1}{k} = +\infty$, $\sum \frac{1}{k^2} < \infty$

ma $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1 = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = 1$

($\left(\frac{1}{k^p}\right)^{\frac{1}{k}} \to 1 \quad \forall \, p \in \mathbb{R}$

Idea dietro il C.R.

$(a_k)^{\frac{1}{k}} \to \underline{\ell \neq 1} \Rightarrow a_k \sim \ell^k$

CRITERIO RAPPORTO

Se $\exists \lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in [0,+\infty]$

allora se $\ell < 1$ la serie converge

$\ell > 1$ la serie diverge

$\ell = 1$ non si sa

[Segue da $\exists \left(\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \right) \Rightarrow \lim \sqrt[k]{a_k} = \ell$]

Idea $\ell < 1$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell < 1$$

$\ell \quad \frac{\ell+1}{2} \quad 1$

$\frac{\ell+1}{2} = \theta < 1$

$\exists N \mid \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < \theta < 1 \quad \forall k \geq N.$

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < \theta \qquad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < \theta \quad , \quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < \theta , \ldots$$

$$a_{N+3} < \theta\, a_{N+2} < \theta^2\, a_{N+1} < \theta^3 a_N$$

$$a_{N+k} < \theta^k \, a_N$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \theta^k \, a_N < \infty$$

è una serie geom. di ragione $\theta < 1$.

OSS. $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=N}^{\infty} a_k + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)}_{\in \mathbb{R}_+}$$

$\Rightarrow \sum a_k \approx \sum b_k$

ES pensare al caso $\ell > 1$

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

$a_k > 0, a_k \to 0, \; a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k$ (ossia a_k decrescente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \approx \sum 2^k a_{2^k}$$

ES $$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \qquad \sum \frac{1}{n \log n} = +\infty.$$

$\frac{1}{n \log n} \searrow 0$

$\sum \frac{1}{n} = +\infty$ lo sappiamo

$a_n < \frac{1}{n \log n} < \frac{1}{n}$ non ci serve

$n^{1+\varepsilon}$, $n \cdot n^{\varepsilon} > n \log n > n$, $\forall \varepsilon > 0$ $\frac{n^{\varepsilon}}{\log n} \to +\infty$ strada sbagliata.

C. R. $\sqrt[n]{\frac{1}{n \log n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\log n}} \to 1$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{\log n} \to 1$

Proviamo il criterio di condensazione.

ATTENZIONE!!

$\frac{1}{n \log n} \searrow 0$ essendo $n \log n \nearrow +\infty$

$$\sum_2 \frac{1}{n \log n} \approx \sum \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \log 2^n} = \sum \frac{1}{n \log 2}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Quindi $\sum \frac{1}{n \log n} = +\infty$

Es. $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

$\left(\frac{1}{n \log^2 n} \right)^{\frac{1}{n}} \to 1$. no go

$\frac{1}{n \log^2 n} \searrow 0$

CCC $\sum \frac{1}{n \log^2 n} \approx \sum \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \log^2 2^n} =$

$$\sum \frac{1}{(\log 2^n)^2} = \sum \frac{1}{n^2 (\log 2)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

e quindi $\sum \frac{1}{\dots} < +\infty$

Abbiamo dimostrato che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ $\sum \frac{1}{n^2} = +\infty$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha \geq 2$ $\quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\quad \alpha \leq 1$ $\quad \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$

e per $\underline{1 < \alpha < 2}$?

Proviamo CCC

$\alpha \in (1,2)$
$\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$, $\sum \frac{1}{n^\alpha} \approx \sum \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}$

$= \sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$

è una serie geometrica che converge $\iff \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$

cioè $2^{\alpha-1} > 1$ cioè $\alpha - 1 > 0$, ovvero $\alpha > 1$

Teorema (!) $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) \text{ converge} \iff \alpha > 1.}$

[D 2467] $\quad \sum_1^\infty \frac{3^n n!}{n^n}$

C.R. $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cancel{(n+1)}!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{\cancel{3^n} \cancel{n!}}$

$= \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1$ $\quad (n+1)! = (n+1)\, n!$

$\boxed{2 < e < 3}$ e quindi diverge

[D 2466] $\quad \sum \frac{2^n n!}{n^n}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{e} < 1$

quindi converge

[D 2468] $\sum \frac{e^n n!}{n^n}$

Usiamo Stirling

Teorema** (Stirling) $\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$ difficile

e usiamo confronto asintotico $\Rightarrow$

$$\sum \frac{e^n n!}{n^n} \approx \sum \cancel{\frac{e^n}{n^n}} \cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \sqrt{2\pi n}$$

Quindi diverge.

Senza usare Stirling $\boxed{\left(\frac{n}{e}\right)^n e \le n! \le \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n e}$ ES.

$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e$ $\qquad \sum \frac{e^n n!}{n^n} \geq \sum e$ diverge.

Lezione 22 19-11-21

venerdì 19 novembre 2021 08:21

Serie a termini in $\mathbb{R}$

① CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

$a_k \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$ da questo segue che

$\boxed{\text{Se } \sum |a_k| < +\infty \Rightarrow \sum a_k \text{ converge}}$

e $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

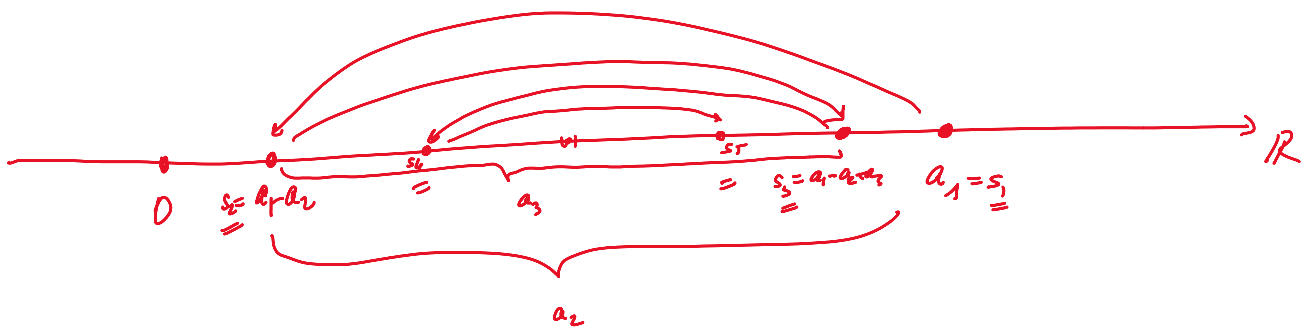
② CRITERIO DI LEIBNIZ

Se $a_n \searrow 0$ (monotona decrescente cioè $a_{n+1} \leq a_n$ e $a_n \to 0$)

allora la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

(oss $\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$) $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$



$S_{2n} \nearrow \qquad \swarrow S_{2n+1} \qquad S_{2n} \leq S_{2m+1} \quad \forall\, n, m$

$S_{2n} \nearrow \alpha \leq \beta \swarrow S_{2n+1}$

$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$

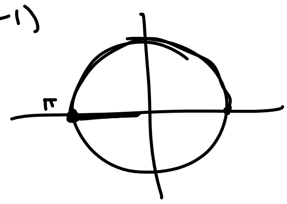
$\beta \quad \alpha$

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta$

[GE] Cap 4

Es 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

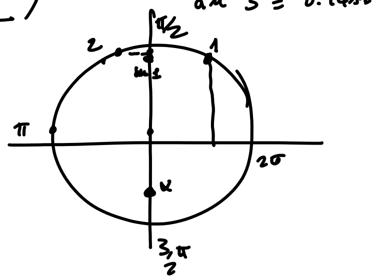
$\cos \pi n = (-1)^n$



$\frac{1}{n+2} \searrow 0 \quad \overset{\text{Leib}}{\Longrightarrow} \quad$ converge.

Es 10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\sin n)]^n$ $\quad \left(\text{Es}^{***} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)^n \right)$

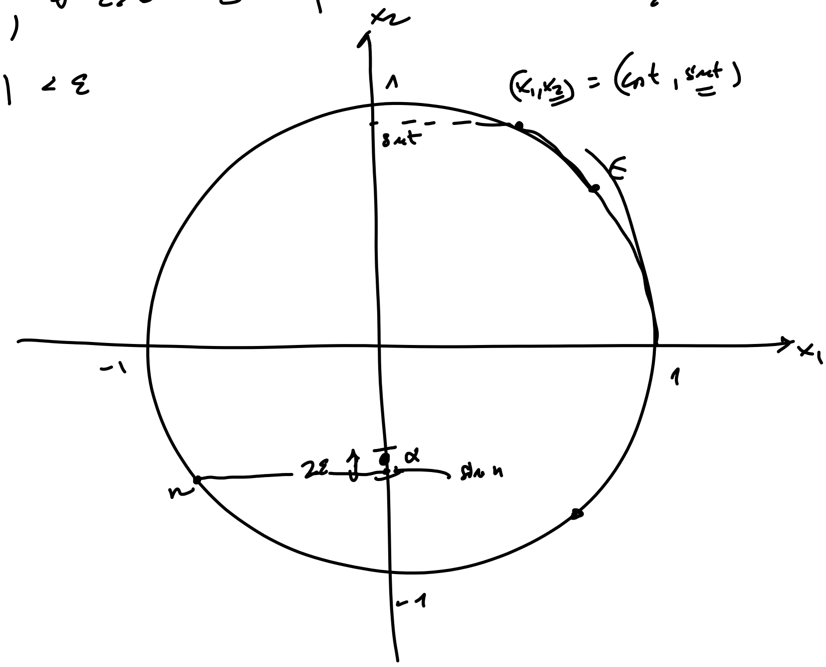
$\sin 1 = 0.84\ldots$
$\sin 2 = 0.9$
$\sin 3 = 0.1411$



$\{\sin n\}$ è una successione non banale

Vale** $\forall\ \alpha \in [-1,1],\ \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n \mid$

$|\sin n - \alpha| < \varepsilon$



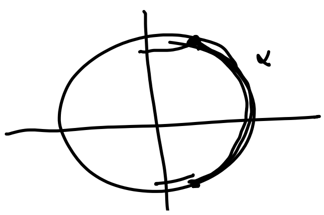
$\Sigma (\sin(\sin n))^n$ converge ass.

$|\sin n| < 1 \quad \forall n$

Studiamo la serie dei moduli $\Sigma\, |\underbrace{\sin(\sin n)}_{|\uparrow| < 1}|^n$, $\quad |\sin \alpha| \leq \sin 1 < 1.$
se $|\alpha| < 1$

$\Sigma\, |\sin(\sin n)|^n < \Sigma (\sin 1)^n$

$\uparrow$
serie geom
conv



$\overset{C.C.A.}{\Longrightarrow}$ $\sum \left(\text{Hard}(f(n))\right)^n$ converge.

OSS. Una serie può convergere ma non convergere assolutamente

$$\sum_1^n a_k \to \alpha \quad \text{ma} \quad \sum_1^n |a_n| \to +\infty$$

Per esempio $\sum_1 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ per Leibniz conv ma $\sum \frac{1}{n}$ diverge

---

Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie

Es 19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

Studiamo la convergenza assoluta $\quad \sum \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}$

Proviamo C.R.
$$\left(\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{(1+|x|^{2n})^{\frac{1}{n}}} = \theta_n$$

Se $|x|=1$, $\theta_n \to 1$

$|x|=2$
$$\frac{2}{(1+2^{2n})^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$1 = 1^{\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} < (2)^{\frac{1}{n}}$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$1 \qquad\qquad 1$$

Se $|x|=2$ la serie conv ass

Analog. Se $|x|>1$ la serie conv., $\theta_n \to \frac{1}{|x|} < 1$.

Se $|x|=1$ la serie div. assolutamente $\left(\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}} = \frac{1}{2}\right)$

Se $|x|=0$ $\theta_n \equiv 0$ la serie converge

$0<|x|<1$

$$\theta_n = \left(\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{(1+|x|^{2n})^{\frac{1}{n}}} \to |x| = \theta, \text{ converge}$$

$$(1+|x|^{2n})^{\frac{1}{n}} \to 1$$

$\sum \frac{|x|^n}{\ldots}$ $\overset{C.C.A}{\ldots}$ $\sum \frac{x^n}{\ldots}$ converge $\forall x \neq \pm 1$

$1 + x^{\dots}$

//

se $x=1$ $\quad \sum \frac{1}{2}$ diverge a $+\infty$

$x=(-1)$, $\sum \frac{(-1)^n}{2} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty (-1)^n$ è serie indeterminata

o, meglio

non convergente.

→ **Os.** se $a_n \geq 0$ $\quad \sum a_n$, $\sqrt[n]{a_n} \to \theta$, $\theta > 1$. $\quad \sqrt[n]{a_n}$ per $n \geq N$

$\Longrightarrow$ $a_n \to +\infty$

1 $\quad \bar\theta \quad \theta$

$1 < \bar\theta = \theta - \varepsilon$

Analogamente se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \theta > 1 \implies a_n \to +\infty$

$a_n > \bar\theta^n \nearrow +\infty$

$$\boxed{a_n = \theta^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta}$$

ES 20 $\quad \sum_1^\infty x^n \log x^n = (\log x) \sum_1^\infty n x^n$ $\quad$ $x>0$

serie a termini positivi

C.R. $\quad \sqrt[n]{n x^n} \longrightarrow x$

$\sqrt[n]{n} \cdot x$

$\downarrow$

1

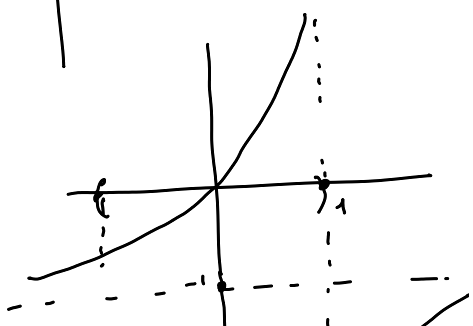
se $x<1$ la serie converge

$x>1$ la serie diverge

se $x=1$ la serie diverge

$\sum_1^\infty x^n = \frac{x}{1-x}$

$|x|<1$



$f(x) = \frac{x}{1-x}$ con dominio $(-1,1)$

coincide con la serie $\sum_{n=1}^\infty x^n$

$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ $\quad$ conv ass $\quad \sum_{k=0}^\infty \frac{|x|^k}{k!}$

$$\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \longrightarrow 0$$

la serie converge assolutamente ...

(questa serie converge più rapidamente di una serie geometrica

$$\frac{x^k}{k!} \overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{x^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}} = \left(\frac{ex}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\Bigg)$$

Teorema (bellissimo)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$$

In particolare $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e}$ $\overset{\text{facile}}{\Longrightarrow}$ e è irrazionale

Es. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Valore assoluto $\displaystyle\sum \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ Crit. rap. $\displaystyle\frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!} \frac{(2k)!}{x^{2k}} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} \to 0$

quindi converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

e definisce su $\mathbb{R}$ una funzione pari infatti

Teo $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$

In particolare ↑ è periodica di periodo 2π.

Es 34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$

Studiamo la convergenza assoluta

$$\left(\frac{|x|^{n^2}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|^n}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } |x|<1 \\ +\infty & \text{se } |x|>1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la serie converge se $|x|<1$ e non converge se $|x|>1$

Se $x=1$ diverge

Se $x=-1$ $\quad \sum \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad (-1)^{n^2} = (-1)^n$!

converge per Leibniz

Es 36 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{x^n}$, $n \geq 1$, x^x ← def solo per $x>0$

$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x \log x} = 1$.

$\lim_{x\to 0+} x^{x^n} = \lim e^{x^n \log x} = 1$

$x>0$

$x \geq 1$ diverge

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} \to$

Se $0<x<1$ diverge

Serie telescopiche

$\forall N$

$$\sum_{1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n) \qquad a_n = b_{n+1} - b_n$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_{n+1} - b_n = (\cancel{b_2} - b_1) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_4} - \cancel{b_3}) + \dots + (b_{N+1} - \cancel{b_N}) = b_{N+1} - b_1 \qquad (*)$$

Se b_n ha limite $b_n \to \beta$ allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_{n+1} - b_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \beta - b_1$

Teo- $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta - b_1}$ se $a_n = b_{n+1} - b_n$ e $\lim b_n = \beta$.

Rifacciamo il calcolo $(*)$ in maniera rigorosa

$$(\cancel{b_2} + \cancel{b_3} + \dots \cancel{b_N}\, b_{N+1}) - (b_1 + \cancel{b_2} + \dots + \cancel{b_N})$$

$$\sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n) = \sum_{n=1}^{N} b_{n+1} - \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{k=2}^{N+1} b_k - \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=2}^{N+1} b_n - \sum_{n=1}^{N} b_n$$

$n+1 = k$ $\qquad k = n$

$$= \underbrace{\sum_{n=2}^{N} b_n} + b_{N+1} - b_1 - \underbrace{\sum_{n=2}^{N} b_n} = b_{N+1} - b_1$$

Applicazioni

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \approx \sum \frac{1}{n^2}$$

per confronto asintotico $\quad \dfrac{1}{n(n+1)} \cdot n^2 \to 1$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}$$

Sugg. questa è una serie telescopica

$$\frac{1}{n(n+1)} = b_{n+1} - b_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) - bn}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

se $a = b = 1$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{n(n+1)}$$

$\boxed{b_n = -\dfrac{1}{n}}$ $\qquad b_n \to 0$

$$\boxed{\sum^{\infty} \frac{1}{\dots} = 1}$$

$\sum^{\infty}$ …

[G*] Cap 4 Es 59–63 Calcolare:

Es. 62 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (ovviamente la serie conv. per criterio confr. asint. con $\sum \frac{1}{n^2}$)

$$\frac{1}{n(n+2)} \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n(n+2)}.$$

$$\sum_1^N \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \boxed{\sum_1^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)}$$

$$\hookrightarrow = \sum_1^N \frac{1}{n} - \sum_1^N \frac{1}{n+2} = \sum_1^N \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{n=3}^N \frac{1}{n}} - \cancel{\sum_{n=3}^N \frac{1}{n}} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

$$R \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

Oss. $\quad \sum_1^N a_n = \underbrace{\sum_1^N (b_{n+1} - b_n) = b_{N+1} - b_1}$

$b_n = b(n) \qquad \frac{b(n+1) - b(n)}{1}$ "derivata discreta"

Oss $\quad$ Se $\underset{(*)}{a_n = b_{n+1} - b_n} \Rightarrow \underline{b_{N+1} - b_1 = \sum_1^N a_n} \quad \forall \underline{N}$

Ma posso dunque trovare (dati a_n) b_n t.c valga (*) ? Sì!

$\underline{N=1} \qquad b_2 - b_1 = a_1 \quad$ ora $b_2 = a_1 + b_1$

scegliamo $b_1 = \underline{c}$ per una qualunque $c \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \quad b_2 = a_1 + c$

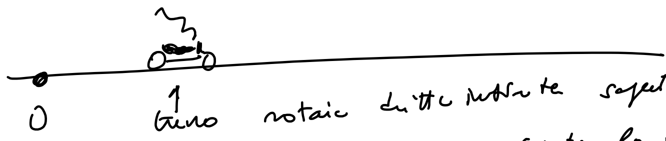
$$b_3 - b_1 = a_1 + a_2 \qquad b_3 = c + a_1 + a_2$$

$$\boxed{b_N = c + \sum_{1}^{N-1} a_n}$$

"$\{b_n\}$ è la PRIMITIVA DISCRETA di $\{a_n\}$"

Equazioni differenziali e integrali

Un punto materiale vincolato a muoversi su una retta con velocità assegnata $f(t)$



treno rotaie dritte infinite sapete che alle 7 stava in 0 sapete la velocità e volete sapere dove si trova alle 12.

$x(t)$ = la posizione del treno all'istante t

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(t) = f(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = x'(t)$$

& $f(t) = c$ (velocità costante uguale a c)

$$\begin{cases} \dot{x} = c \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$x(t)$ t.c. $\dot{x}(t) = c$

$$\boxed{x(t) = ct + k}$$

$0 = x(0) = k$

$x(t) = ct$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin t \\ x(0) = \pi \end{cases}$$

$x(t) = -\cos t + k$

$x(0) = \pi = -\cos 0 + k = -1 + k$, $k = \pi + 1$

la soluzione è $x(t) = -\cos t + \pi + 1$

$(\cos^3 t)' = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$

$\{\ x(0)=0$

$= -3$

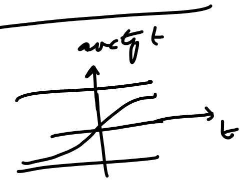
Quindi $\sin t \cos^2 t = -\frac{1}{3}(\cos^3 t)'$

$= \left(-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)'$

$$\left(-\frac{1}{3}\cos^3 t + k\right)' = \sin t \cos^2 t$$

$$0 = x(0) = -\frac{1}{3} + k \qquad k = \frac{1}{3}$$

la soluzione è $-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3} = \frac{1-\cos^3 t}{3}$



$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{1+t^2} \\ x(0) = 2 \end{cases} \qquad (\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$x(t) = \operatorname{arctg} t + k \qquad x(0) = 2 = \operatorname{arctg} 0 + k, \quad k = 2$

$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \underline{x(t) = \arcsin t + k.}$

$\underline{t \neq 0}$ Calcolare la derivata di

$\log|t|$

$\underline{t>0}, \quad (\log t)' = \frac{1}{t}$

$t<0 \qquad \log(-t), \ D\log(-t) = \frac{1}{-t}(-1) = \frac{1}{t}$

$$\boxed{D \log|t| = \frac{1}{t} \quad \text{in } \mathbb{R} - \{0\}}$$

$\underline{\text{Es.}}$ $\dot{x} = \log t$ trovare una funzione $x(t)$ t.c. $\dot{x} = \log t$

Sugg.: usare la regola di Leibniz (derivata del prodotto).

$$(t \log t)' = \log t + t \cdot \frac{1}{t} = \underline{\underline{\log t}} + 1$$

$$(t \log t - t)' = \log t$$

$$(t(\log t - 1))'$$

$$x(t) = t(\log t - 1)$$

Oss. Se f e g sono definite su un intervallo I

e $f' = g'$ su $\underline{I} \Longrightarrow f - g =$ costante

Segue dal teorema di Lagrange!

Chiamiamo $F(x) = f(x) - g(x)$ $\quad \underline{F' = 0}$

Vogliamo dimostrare: $F(x) = F(y) \quad \forall\, x, y \in I$

$x < y \qquad [x, y] \qquad F$ è derivabile in $I \Rightarrow$ è cont. in I

$\Rightarrow$ è continua in $[x, y]$, derivabile in (x, y)

Teo. Lagrange $\quad F(y) - F(x) = \underset{0}{\underline{F'(\xi)}}\,(y - x)$ per uno $\xi \in (a, b)$

$\Rightarrow F(y) = F(x)$

Consideriamo $\quad (*) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ e supponiamo che $\exists\ X(t)$ derivabile t.c. $\dot{X}(t) = f(t)$.

allora $\exists!$ la soluzione di $(*)$

$X(t) + k \qquad X(t_0) + k = x_0$ ove $k = x_0 - X(t_0)$

$x(t) := X(t) + (x_0 - X(t_0))$ è soluzione di $(*)$

e se $\boxed{y(t) \text{ fosse un'altra soluzione di } (*)}$

$\dot{y} = f(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = y(t)$

$\Rightarrow \quad \underset{x_0}{x(t_0)} = \underset{x_0}{y(t_0)} + k \quad \Rightarrow \quad k=0.$

$\Rightarrow \quad y(t) \equiv x(t).$

DEFINIZIONE Data $f(x)$ definita su un intervallo I una funzione F derivabile su I t.c. $F' = f$ è una PRIMITIVA di f

Oss. due primitive F e G su un intervallo di f differiscono per una costante ($F' = G'$ su I $\Rightarrow$ $F - G = \text{cost.}$)

DEF Data f su I definiamo la primitiva generale

$$D^{-1} f = \{ F \mid F' = f \} = \{ F = F_0 + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

e F_0 è una primitiva di f.

Notazione classica

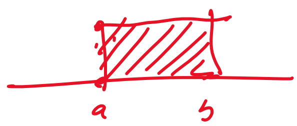
$$D^{-1} f =: \int f =: \int f(x)\,dx \quad \text{integrale indefinito di } f$$

Definiamo l'integrale definito di f continua su $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx :=$ area con segno tra il grafico di f e l'asse delle x

$f(x) \geq 0 \qquad G_f \subseteq [a,b] \times [0, \infty)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area} \{ (x,y) \mid x \in [a,b], \ 0 \leq y \leq f(x) \}$$

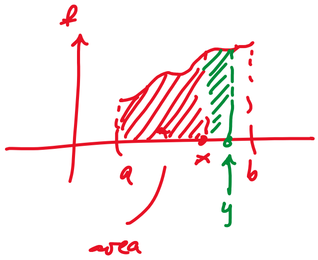
se $f(x) = 1 \qquad \int_a^b 1\,dx = (b-a)$



se $f(x) \leq 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\text{area}$

$$\int_a (-1)\,dx = -(b-a) = (a-b)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale



Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad F(a)=0.$$

Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

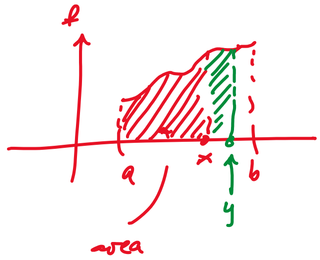
ossia F è una primitiva di f $\quad (F(a)=0)$

$\int_a^b (-1)\,dx = -(b-a) = (a-b)$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$

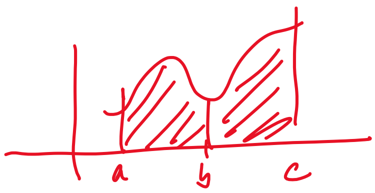
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad F(a)=0.$$



Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

ossia F è una primitiva di f $\quad (F(a)=0)$

Proprietà:



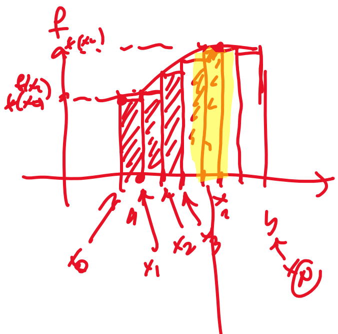
Additività:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

N.B. la x è una variabile muta

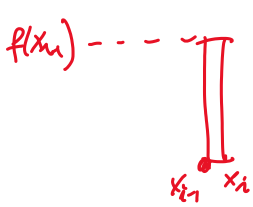
Altra notazione.
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f = \mathcal{I}(f)$$
$$\| \quad \int_a^b f(t)\,dt$$

Perché nella notazione compare "dt"?



f continua e positiva

$$\text{Area } \underbrace{\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}}_{\mathcal{E}} \simeq \sum_{i=1}^{N} \underbrace{f(x_i)}_{\text{altezza}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}}$$



Teorema f cont in $[a,b]$, $f \ge 0$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \forall$

$x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$

t.c. $|x_i - x_{i-1}| \le \delta$ Allora

$$\left| \text{Area } \mathcal{E} - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

a

x_0

x_n

$\forall \quad \underline{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i}$

SOMME PARZIALI DI RIEMANN

<u>Leibniz</u>

$$\sum_{i=1}^{N} f(t_i)\,\Delta t_i \sim \sum_{1}^{N} f(t_i)\,dt_i \sim \int_a^b f(t)\,dt$$

(P1)

Notazione Definiamo a $a<b$: $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

Es $\int_1^0 \sin(x)\,dx = -\int_0^1 \sin x\,dx = -\left[(-\cos x)\right]_0^1 = \cos 1 - 1$

Ricordiamo il T.F.C f cont in $[a,b]$, $\forall x_0 \in [a,b]$

definisco $F(x) = F(x;x_0) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$

Allora F è una primitiva di f ossia $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$

$(F(x_0)=0)$

Osservazione $[F]_a^b := \underbrace{F(b) - F(a)}_{} = \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx$

l'incremento di F tra a e b

$\stackrel{(P1)}{=} \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx + \int_a^{x_0} f(x)\,dx \underset{\text{(additività)}}{=} \int_a^b f(x)\,dx$

Oss. Se G è una primitiva qualunque di f in $[a,b]$

$\Rightarrow G' = f = F' \Rightarrow (F-G)' = 0 \xRightarrow{\text{Lagr.}} F - G = \text{cost.}$

e quindi $[G]_a^b = [F]_a^b$

Morale Se G è una primitiva qualunque di f cont. in $[a,b]$ $(a<b)$

$\Rightarrow \int_a^b f = [G]_a^b = G(b) - G(a).$

Oss. $\begin{cases} \dot{x} = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ f è cont in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$

La soluzione è. $\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds}$

Infatti, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x} \stackrel{TFC}{=} f(t)$ ed è unica per Lagrange

perché $\int_{t_0}^{t_0} f(s)\,ds = 0$

CALCOLO ...

Regole

(R1) linearità

$$\int (f+g) = \int f + \int g \qquad \Big(\Leftarrow \ \text{se } F' = f, \ G' = g \quad F = \int f, \ G = \int g$$

$$\Rightarrow (F+G)' = f+g \ \text{ovvie} \quad \int (f+g) = \int f + \int g \Big)$$

$$\int (af) = a \int f$$

$$\text{se } F' = f \Rightarrow (aF)' = a f$$

[D] 1031 - 1041

trovare una primitiva o tutte le primitive di $5ax^6$

1031. $$\int 5a^2 x^6 dx = 5a^2 \int x^6 dx = \underbrace{5a^2 \frac{x^7}{7}}_{\text{una primitiva}} (+c)$$

tutte le primitive al variare di $c \in \mathbb{R}$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\int x^{\alpha-1} = \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

$$\int x^p = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$\int \underbrace{5a^2 x^6}_{f(a)} da = 5x^6 \int a^2 da = 5x^6 \frac{a^3}{3}$$

1043 $$\int \frac{dx}{x^2+7}$$

Sappiamo che $\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$ ovvero

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+7} = \frac{1}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} \quad ✓$$

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) \right)' = \frac{1}{\frac{x^2}{7}+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}$$

derivazione funzione composta

$$\left(\sqrt{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \right)' = \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1}$$

linearità della derivata

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}$$

Controllo $\left(\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}$

$$= \frac{1}{7} \frac{1}{1+\frac{x^2}{7}} = \frac{1}{7+x^2} \checkmark$$

1048 $\int tg^2 x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

N.B. $\frac{1}{\cos^2 x} = (tg\, x)'$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int 1 \overset{(21)}{=} tg\, x - x$$

1050. $\int 3^x e^x \, dx = \int (3e)^x$

$a>0,\ a\neq 1$

$(a^x)' = (e^{x \log a})'$

$= a^x \log a$ ← $a=1$ ok

$$= \frac{(3e)^x}{\log(3e)} = \frac{3^x e^x}{1+\log 3}$$

$$\boxed{\int a^x = \frac{a^x}{\log a}} \quad (a\neq 1)$$

1045 $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

$$= sh^{-1} \frac{x}{2}$$

Come sopra

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

NOTAZIONI

$\operatorname{Arccosh} x := \cosh^{-1} x$

$\sinh x = sh\, x$

$\sinh^{-1} x = sh^{-1} x$

$\cosh x = ch\, x$

Controllo: $\left(sh^{-1} \frac{x}{2}\right)'$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4+x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}.$$

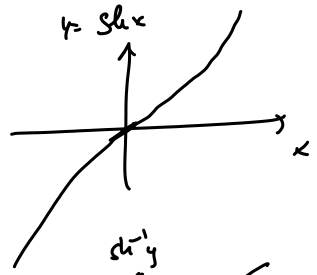
$\ldots \log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$

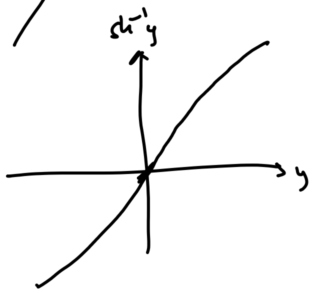
Ma allora se è giusto il calcolo di sopra ed ho usato anche [D]

si deve avere
$$\boxed{\log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) = c + \operatorname{sh}^{-1}\frac{x}{2}}$$

calcolando in 0 questa relazione otteniamo

$$\log 2 = c$$





$\frac{x}{2}=t$
$$\log\left(2t+\sqrt{4+4t^2}\right) = \log 2 + \operatorname{sh}^{-1} t$$
$$= \log\left(2\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right) = \log 2 + \operatorname{sh}^{-1} t$$
$$= \cancel{\log 2} + \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) = \cancel{\log 2} + \operatorname{sh}^{-1} t$$

Quindi, abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\operatorname{sh}^{-1} x = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Seconda dimostrazione (senza funzione)

$$\operatorname{sh}^{-1} x = y \iff \underline{\underline{x}} = \operatorname{sh} y \overset{DEF}{=} \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$e^y - e^{-y} - 2x = 0 \iff e^{2y} - 1 - 2e^y x = 0$$

↑ moltiplico e^y

$$\iff z^2 - 2zx - 1 = 0, \qquad \underline{z = e^y > 0}$$

$$\iff \begin{cases} z = x \pm \sqrt{x^2+1} \\ z > 0 \end{cases} \iff z = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\iff e^y = x + \sqrt{x^2+1} \iff y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

ALTRE REGOLE DI DERIVAZIONE

(R2) $\int (f\circ y)(x)\, y'(x)$ $= \int f(y)dy \Big|_{y=y(x)}$ $F = \int f$

$y(x)$

dim $(F\circ y)' = F'\circ y \; y' = (f\circ y)\, y'$ ✓

OK $\int f(y)\, dy \overset{(R1)}{=} \int (f\circ y)(x)\, y'(x)\, dx$

CAMBIO DI VARIABILE $y = y(x)$

$$= \int f(y(x))\, y'(x)\, dx$$

N.B. $\int f(y)dy \Big|_{y=y(x)} = \int f(y(x)) \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'(x)} dx$

(R3) Integrazione per parti $(fg)' = f'g + fg'$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Rifacciamo l'integrale $\int \frac{1}{x^2+7} dx$

$$= \frac{1}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{y^2+1} \sqrt{7}\, dy$$

$y = \frac{x}{\sqrt{7}}$

$x = \sqrt{7}\, y$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{y^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} y \Big|_{y=\frac{x}{\sqrt{7}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Nella tavola degli integrali (primitive) del [D] compare

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Ricorda (formule parametriche) $\quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$2 \operatorname{arctg} t = x$$

Calcoliamo "dx" $\quad \frac{dx}{dt} = x'(t) = \frac{2}{1+t^2}$

$x = 2\operatorname{arctg} t$

$$2\int \frac{dt}{1+t^2}\,\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \lg\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c}$$

2° gruppo ES [D] dal 1051 al 1190

$$\int f\circ u\ u'\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=u(x)}$$

$F(y) = \int f(y)\,dy$

$(F\circ u)' = F'\circ u \cdot u' = f\circ u \cdot u'$

$F(y)\big|_{y=u(x)} := (F\circ u)(x)$

Da destra a sinistra:

$$\int f(y)\,dy = \int f\circ u\ u'\,dx$$

$y = u(x)$ $\quad$ $x = u^{-1}(y)$ $\quad$ "$dy = u'\,dx$"

1063 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$$= \int \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{2u+1}}$$

$u = \frac{x^2}{2}$

$du = u'dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\,2\sqrt{t} = \sqrt{t}$$

$t = 2u+1$ $\quad = \sqrt{2u+1} = \sqrt{2\frac{x^2}{2}+1} = \sqrt{x^2+1}$

$dt = 2\,du$

1094 $\displaystyle\int x\,7^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 7^y\,dy = \frac{1}{2}\frac{7^y}{\lg 7} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{7^{x^2}}{\lg 7}$$

$\displaystyle\int a^y = \frac{a^y}{\log a}$

2

$y = x^2 \quad x = \sqrt{y}$

$\left(y' = 2x \quad x = \frac{y'}{2}\right)$

$dy = 2x\,dx \quad x\,dx = \frac{dy}{2}$

Controllo.

$$\left(\frac{1}{2}\frac{7^{x^2}}{\lg 7}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\,\cancel{\lg 7}}\,7^{x^2}\cdot\cancel{\lg 7}\ \cancel{2}x$$

$7^y\big|_{y=x^2}$ ... 7^{x^2} ... nel caso du

$$\int e^{x^2} \qquad \int_0^x e^{t^2}\,dt = F(x), \quad F'(x) = e^{x^2}$$

Gaussiana

$$F = \int e^{x^2}$$

$\mathrm{Err}(x)$ "funzione di errore"

1075 $$\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+1}} + \int \frac{1}{\sqrt{5x^2+1}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \mathrm{sh}^{-1} y$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+1}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt5 x)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt5}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{\sqrt5}\,\mathrm{sh}^{-1} t = \frac{1}{\sqrt5}\,\mathrm{sh}^{-1}(\sqrt5 x)$$

$t = \sqrt5 x$

$x = \frac{1}{\sqrt5} t \qquad x' = \frac{1}{\sqrt5}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt5}\,\mathrm{sh}^{-1}(\sqrt5 x)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{(5x^2+1)'}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{du}{\sqrt u}$$

$u = 5x^2+1$

$$= \frac{1}{10}\,2\sqrt u = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+1}$$

Res $\quad \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt5}\,\mathrm{sh}^{-1}(\sqrt5 x) \qquad \mathrm{sh}^{-1} t = t + \lg\sqrt{1+t^2}$

1097 $$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \int \frac{(e^x-1)'}{e^x-1}\,dx = \int \frac{du}{u} = \lg|u|$$

$u = e^x - 1$

$\lg|e^x-1|$

1070 $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}$ 1° passo costruire il rapporto ... grado numeratore < grado denominatore

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+4} = \frac{x^2+4-5x+2}{x^2+4} = 1 - \frac{5x-2}{x^2+4}$$

o dividere tra polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ $\deg P \geq \deg Q$

$$P(x) = Q(x)M(x) + R(x), \quad \deg R < \deg Q.$$

$$= x - \int \frac{5x-2}{x^2+4}\,dx = x - 5\int \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{1}{x^2+4}$$

mi aspetto $\lg(x^2+4)$ arctg

$$= x - \frac{5}{2}\int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$

$$= x - \frac{5}{2}\lg(x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

$$\underset{\substack{t=\frac{x}{2} \\ x'=2}}{=} \int \frac{dt}{t^2+1}$$

1107 $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sin\sqrt{x}$$

$$2\int \cos\sqrt{x}\,(\sqrt{x})' \underset{u=\sqrt{x}}{=} 2\int \cos u\,du = 2\sin u = 2\sin\sqrt{x}$$

1119 $$\int \operatorname{tg} x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx \underset{u=\cos x}{=} -\int \frac{du}{u} = -\log|u|$$

$$= -\lg|\cos x| = \lg\frac{1}{|\cos x|}$$

1049 $$\int \operatorname{cth}^2 x = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \int \frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$$\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

[D] terzo gruppo da 1191 - 1210

1191

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} = -\int \frac{1}{t^{\cancel{2}}}\,\frac{1}{\cancel{\frac{1}{t}}\sqrt{\frac{1}{t^2}-2}}\,dt$$

$x=\frac{1}{t}$ $\qquad$ $x'(t)$ $\qquad$ $dx = x'(t)\,dt$

$|x|>\sqrt{2}$ $\qquad$ $|t|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $0<t<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x>\sqrt{2}$

$$= -\int \frac{1}{t}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{1-2t^2}}{|t|}} \underset{t>0}{=} -\int \frac{1}{\sqrt{1-2t^2}}$$

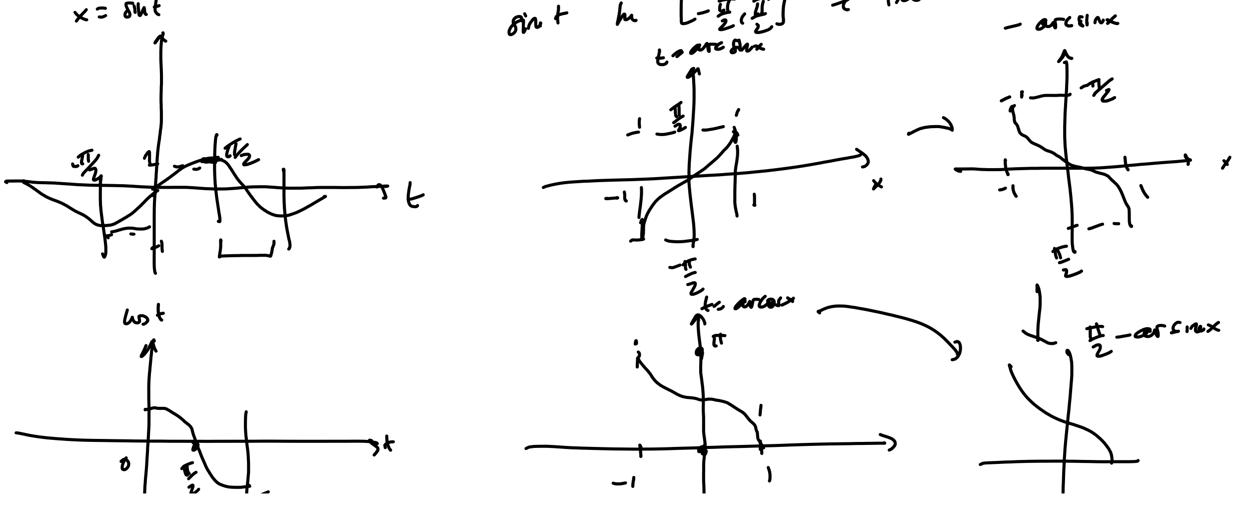
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-(\sqrt{2}t)^2}} \underset{u=\sqrt{2}t}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin u = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin \sqrt{2}t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Ris $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x} \qquad x>\sqrt{2}$

$\sin t$ in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ è iniettiva $\Rightarrow$ invertibile

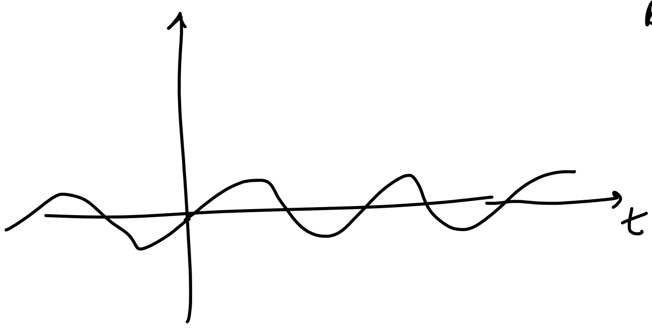


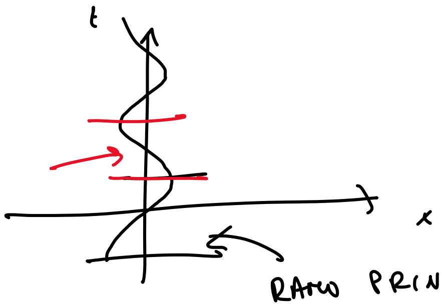
2

$\arccos 0 = \pi \qquad \arcsin 0 = 0$

$\text{Arccos}\, x \qquad \text{Arcsin}\, x$

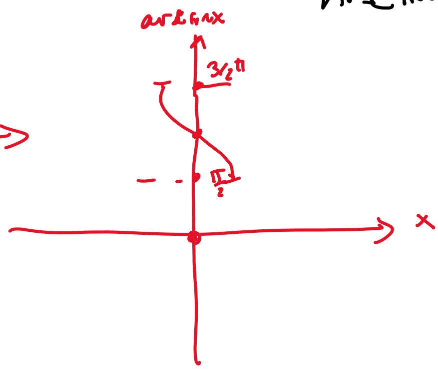
RAMI PRINCIPALI





RAMO PRINCIPALE
Arcsin x

ramo secondo



$\rightarrow \arcsin 0 = \pi$

è l'inversa di $\sin x$ con dominio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

$$\boxed{\arcsin x = \pi + \text{Arcsin}\, x}$$

Primitive di funzioni elementari

$f(x)$	I	$F(x)$ t.c. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$
x^n , $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}$ (se $n \geq 0$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
x^α, $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
a^x	$\mathbb{R}$	$\dfrac{a^x}{\log a}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	$\log \lvert x\rvert$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\tanh x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\sinh^{-1} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\{x > 1\}$	$\cosh^{-1} x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\tanh^{-1} x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$	$\tan x$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$	$\operatorname{cotan} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\{\lvert x\rvert < 1\}$	$\operatorname{Arcsen} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{Arctan} x$

Alcune formule utili nel calcolo di primitive[1]

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})\,, \qquad \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsen} x = \frac{\pi}{2}\,, & (\text{rami principali} : \operatorname{Arcsen} 0 = 0\,,\ \ \operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{Arccot} x + \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}\,, & (\text{rami principali} : \operatorname{Arctan} 0 = 0\,,\ \ \operatorname{Arccot} 0 = \frac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x + \sqrt{x^2-1}) = \pi - \operatorname{Arcsen}\frac{1}{x}\,, & \forall\ x \geq 1 \\ \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\,, & \forall\ x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\arctan t\,, \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \tag{4}$$

[1] Per (1) e (3), si veda [C], rispettivamente, Proposizione 3.11 ed Es 7.6. Le (2) e (4) sono elementari.

1191 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx \underset{x=\frac{1}{t}}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)$

$\longrightarrow \displaystyle\int f(x)\,dx \underset{x=u(t)}{\overset{\uparrow}{=}} \int \ldots$

$\longrightarrow \displaystyle\int \underbrace{f(u(t))\,u'(t)}_{g(t)}\,dt = \int f(x)\,dx \Big|_x$

Calcoliamo l'integrale in altra maniera

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \underset{\substack{y=\frac{x}{\sqrt{2}}\\ x=\sqrt{2}y}}{\overset{\uparrow}{=}} \cancel{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\cancel{\sqrt{2}}y\sqrt{2y^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} =$$

$|y|>1$

$y>0$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} \underset{y=\mathrm{ch}\,t}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$\sqrt{y^2-1}$

$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$

$\longrightarrow \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch}^2 t - 1$

suggerisce $y = \mathrm{ch}\,t$

" $dy = \mathrm{sh}\,t\,dt$ "

$\frac{dy}{dt} = \mathrm{sh}\,t$

$$= \int \frac{\cancel{\mathrm{sh}\,t}\,dt}{\mathrm{ch}\,t\,\cancel{\mathrm{sh}\,t}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$$

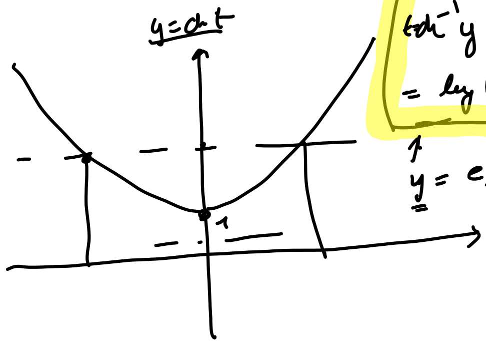
$\mathrm{ch}\,t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$

$$= 2\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+1} \qquad u'(t)\,dt = du$$

$$\underset{u=e^t}{\overset{\uparrow}{=}} 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,u \underset{u=e^t}{\overset{\uparrow}{=}} 2\,\mathrm{arctg}\,e^t = 2\,\mathrm{arctg}\,e^{\mathrm{ch}^{-1}y}$$

$$\boxed{\mathrm{sett\,ch}^{-1}y = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}$$

$y = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $2ye^t = e^{2t}+1$, $u=e^t>0$

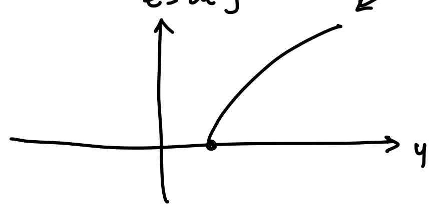


$$= 2\,\mathrm{arctg}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$\mathrm{ch}^{-1}y$ è il ramo principale del ch^{-1}



$\mathrm{ch}^{-1}: [1,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$

Ris. di prima era $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x}$

Rivediamo le Tavole di int. e

$$\boxed{2\,\mathrm{Arctan}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \pi - \mathrm{Arcsen}\,\frac{1}{x} \quad \forall\, x\geq 1} \quad (*)$$

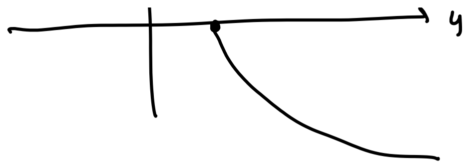
l'altro ramo è

$\mathrm{ch}^{-1}: [1,+\infty) \mapsto [-\infty, 0]$

Sugg.: usare Lagrange ($f'(t) = 0$ su I intervallo

$\Rightarrow f \equiv$ cost.

$f = \lim_{t\to+\infty} f(t)$ su $I = [1, +\infty)$)



Quindi $\underline{2 \arctan\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)} = \pi - \text{Arc sen } \frac{1}{y}$ $y =$

$= \pi - \underbrace{\text{Arc sen } \frac{\sqrt{2}}{x}}$ dividendo per $\sqrt{2}$ numeratore e denominatore di ...

$\Rightarrow$

$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$\int f(x)\,dx = F(x) + c \leftarrow$, $\forall c \in \mathbb{R}$

$= F(x) \leftarrow$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f'g = fg - \int f g'$$

(deriva dalla $(fg)' = f'g + fg'$)

[D] 1211 - 1235

1211 $\int \log x = \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} = x \log x - x$

$f(x) = x$, $g(x) = \log x$ $= \underline{x(\log x - 1)}$

$$\boxed{\int \log x = x(\log x - 1)}$$

1212 $\int \arctan x = \int x' \arctan x = \underline{x \arctan x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$y = x^2$ $dy = 2x\,dx$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y}$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$

1214 $\int x \sin x = -\int x (\cos x)' = -x\cos x + \int \cos x = \underline{-x\cos x + \sin x}$

1232 $\int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x$

f' g f' g

$\Rightarrow \quad 2\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x \quad \Rightarrow \quad \int e^x \sin x = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$

$\int \sqrt{1-x^2}$, $\int \sqrt{x^2-1}$, $\int \sqrt{x^2+1}$

NB $a \neq 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}$

$ax^2+bx+c =$

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

Completamento del quadrato

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int x' \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \sqrt{1-x^2} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}}$$

Altro metodo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int |\cos t| \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}$$

$x = \sin t$

$-1 \le x \le 1$ $\quad x > 0$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\int \sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\cancel{2}\sin t \cos t}{\cancel{4}2}$$

$t = \arcsin x \quad x = \sin t$

PARENTESI TRIGONOMETRICA.

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

$= \cos^2 t - (1-\cos^2 t)$

$= 2\cos^2 t - 1$

$\Rightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \qquad = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

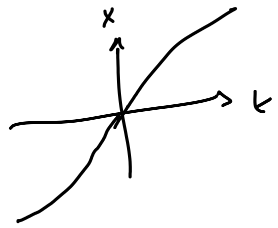
$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 t &= \frac{1+\cos 2t}{2} \\ \sin^2 t &= \frac{1-\cos 2t}{2} \end{aligned}}$$

$$\int \sqrt{1+x^2} \underset{\text{per parti}}{=} \int x' \sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + sh^{-1}x - \int \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \sqrt{1+x^2} = \frac{x\sqrt{1+x^2} + sh^{-1}x}{2}$$



Altro metodo.

$$\int \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{ch\,t}\, dx \underset{x = sh\,t}{=} \int ch^2 t\, dt$$

$$dx = ch\,t\, dt$$

$$ch^2 t - sh^2 t = 1$$
$$ch^2 t = 1 + sh^2 t$$

PARENTESI IPERBOLICA (ES!!)

$$ch^2 x = \frac{ch\,2x + 1}{2}$$
$$sh^2 x = \frac{ch\,2x - 1}{2}$$
$$sh\,2x = 2\, sh\,x\, ch\,x$$

$$= \int \frac{ch\,2t + 1}{2}\, dt$$

$$t = sh^{-1}x \qquad x = sh\,t \qquad ch\,t = \sqrt{1 + sh^2 t}$$

$$= \frac{sh\,2t}{4} + \frac{t}{2} = \frac{sh\,t\, ch\,t + sh^{-1}x}{2} = \frac{x\sqrt{1+x^2} + sh^{-1}x}{2}$$

ES Calcolare $\int \sqrt{x^2-1}$ sia per parti sia con sostituzione iperbolica

---

[D] §4 Int del tipo $\boxed{\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

$\int \sqrt{1-x^2}$

$\int \sqrt{x^2-1}$

$\int \sqrt{1+x^2}$

1262 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ $m=0,\ n=1$

Studiamo $\varphi(x) = -2x^2+3x+2 = -2\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)$

$= -2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right) = -2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9+16}{16}\right)$

completiamo il quadrato (!)

$= -2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)$

$= 2\left(\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$$

$u'(x)\,dx = du$ $u=\frac{4}{5}\left(x-\frac{3}{4}\right)$

$u'(x)=\frac{4}{5}$

[D] 1265 $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$ $(m=3,\ n=-6)$

$\varphi(x) = x^2-4x+5$ $\varphi' = 2x-4$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = 3\sqrt{\varphi} = 3\sqrt{x^2-4x+5}$$ ✓

Se fosse stato $\displaystyle\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{10}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

$4+\frac{10}{3}$

$$= \frac{3}{2}\int\left(\frac{2x-4}{\sqrt{}}+\frac{22/3}{\sqrt{x^2-4x+5}}\right)dx$$

2° tipo

$$\boxed{\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad t = \frac{1}{mx+n}}$$

1271
$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$$

$t = \frac{1}{x+1}$, $x+1 = \frac{1}{t}$, $x = \frac{1}{t} - 1$

$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$$= -\int \frac{t}{t^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\, dt$$

qui $x = x(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$

$$x^2+2x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + 2\,\frac{1-t}{t} = \frac{1+t^2-\cancel{2t}+\cancel{2t}-2t^2}{t^2} = \frac{1-t^2}{t^2}$$

$$= -\int \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}\, dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin \frac{1}{x+1}$$

§6

$$\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots\right)}$$

sostituzione da fare è

$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ dove

$n = m.c.m\,(q_1, q_2, \dots)$

$R(x,y,z)$ = funzione razionale di x, y, z ossia rapporto di due polinomi in x, y, z $\quad R(x,y,z) = \frac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)}$

Es. 1318 (Att. la risp. di [D] è sbagliata)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

$\frac{ax+b}{cx+d} = x$ $\quad a=1$, $b=c=d=0$

$R(y,z) = \frac{1}{y+z}$ $\quad y = x^{\frac{1}{2}}$, $z = x^{\frac{1}{3}}$ $\quad q_1 = 2 \quad q_2 = 3$

$m.c.m(2,3) = 6$

$x = t^6$ $\qquad dx = 6t^5\,dt$

$$6\int \frac{t^5}{\quad}\,dt = 6\int \frac{t^3}{\quad}$$

$\frac{P(t)}{Q(t)}$ e vogliamo ridurci al caso di $\deg P < \deg Q$

Dividiamo tra polinomi

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t+1 \\ \cline{2-2} t^3+t^2 & t^2-t+1 \\ \hline -t^2 & \\ -t^2-t & \\ \hline t & \\ t+1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$t^3 = (t+1)\cdot t^2 - t^2$

$t^3 = (t+1)(t^2-t+1) - 1$

↑ Resto.

$$= 6 \int \frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1} = 6\left(\int t^2-t+1 - \int \frac{1}{t+1}\right)$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \lg|1+t|\right) \qquad t = x^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \lg(1+\sqrt[6]{x})$$

↑ questo $[3]$ metterle + (sbagliato)

1323 $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$ $\qquad R(x,y) = xy \qquad y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad p_1 = 1,\ q_1 = 2$

$a=1 \quad b=-1$

$c=1 \quad d=1$

$t^2 = \frac{x-1}{x+1} \qquad (x+1)t^2 = x-1 \qquad xt^2+t^2 = x-1$ $\qquad n=2$

$t^2+1 = x(1-t^2)$

$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$x' = \frac{2t(1-\cancel{t^2}) + (1+\cancel{t^2})2t}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$$

$$\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\, t\, \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dt = 4\int \frac{(1+t^2)\,t^2}{(1-t^2)^3}\, dt$$

$$= 4\int \frac{(1+t^2)\,t^2}{(1-t)^3(1+t)^3} = -4\int \frac{(1+t^2)\,t^2}{\underbrace{(t+1)^3(t-1)^3}_{Q(t)}}\, dt \quad = \text{con errore!}$$

$Q(t)$ ha radici ± 1 con molteplicità 3.

[illegible]

$\underline{\underline{Q(x)}}$

con $\deg P < \deg Q$

Dal Teorema Fondamentale dell'algebra segue che

$$Q(x) = \underbrace{(x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_r)^{n_r}}_{r \text{ radici reali } x_k \in \mathbb{R} \text{ con molt. } n_k} \left((x-u_1)^2+v_1^2\right)^{m_1} \cdots \left((x-u_j)^2+v_j^2\right)^{m_j}$$

$v_k \neq 0$

$m_k \geq 1$

$0 \leq j$ se $j=0$ non ci sono termini quadratici

$u_k + i v_k$ è radice complessa di Q ($v_k \neq 0$)

$0 \leq r$ $0 \iff$ nessuna radice reale

$\underline{\underline{1+x^2}}$, $n_k \geq 1$

radici $\pm i$ $i = \sqrt{-1}$

$(x-z_1)(x-\bar{z}_1)$ se z_1 è radice complessa di Q

$Q(z_1) = 0$

$Q(\bar{z}_1) = \overline{Q(z_1)} = 0$

$z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$(x-u)^2+v^2$ è un polinomio di 2° grado irriducibile su $\mathbb{R}$

$u, v \in \mathbb{R}$

Formula.

$\hat{Q}$ = come Q con molt ridotte di 1

$$= (x-x_1)^{n_1-1} \cdots (x-x_r)^{n_r-1} \left((x-u_1)^2+v_1^2\right)^{m_1-1} \cdots$$

Secondo Hermite e Ostrogradskij

$$\boxed{\frac{P}{Q} = D\left(\frac{\hat{P}}{\hat{Q}}\right) + \frac{c_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{c_r}{x-x_r} + \frac{2a_1(x-u_1)+b_1}{(x-u_1)^2+v_1^2} + \cdots}$$

$\hat{P}$ da determinare pol di grado $< \deg \hat{Q}$

e c_k e a_i, b_i da determinare

$$\int \frac{P}{Q} = \frac{\hat{P}}{\hat{Q}} + \int$$

$$\int \frac{c}{x-\bar{x}} = c \log|x-\bar{x}|$$

$$\int \frac{2a(x-\bar{x})+b}{(x-\bar{x})^2+\bar{y}^2} = a\int \frac{d\left((x-\bar{x})^2+\bar{y}^2\right)}{(x-\bar{x})^2+\bar{y}^2} + \int \frac{b}{(x-\bar{x})^2+\bar{y}^2}$$

$\log$ $\quad$ arctg

$P(x) = 1$ $\quad Q(x) = x(x+1)^2$

$x_1 = -1$, $r = 2$, $n_1 = 2$

$x_2 = 0$ $\quad n_2 = 1$

$j = 0$ (no radici complesse)

Esempio

1285
$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$$

$Q(x) = x(x+1)^2$

$\hat{Q}(x) = x+1$ $\qquad \underline{\hat{P} = c}$ $\qquad \deg \hat{P} < \deg \hat{Q}$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = D\left(\frac{c}{x+1}\right) + \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$$= -\frac{c}{(x+1)^2} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{-cx + a(x+1)^2 + b\,x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x^2(a+b) + x(-c+2a+b) + a}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = D\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \lg|x| - \lg|x+1| = \frac{1}{x+1} + \lg\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

Calcolare $I_n = \int x^n e^{-x}$, $I_4(x)$ $\forall n \geq 0$

$$I_0 = \int e^{-x} = -e^{-x}$$

$$I_n = \int x^n e^{-x} = -e^{-x} x^n + n \int x^{n-1} e^{-x}, \quad n \geq 1$$

$$= -x^n e^{-x} + n I_{n-1}$$

Calcoliamo ad esempio I_4

$$I_4 = e^{-x}\left(-x^4 + 4 e^{x} I_3\right)$$

$$I_3 = -e^{-x} x^3 + 3 I_2$$

$$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2 I_1$$

$$I_1 = -x e^{-x} + I_0 = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$I_4 = e^{-x}\left(Q(x)\right) \qquad \underline{\deg Q = 4} \quad = -x^4 + \cancel{4}x^3$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} \qquad \underline{a>0}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

$$\underline{= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}$$

$n \geq 2$

$$\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}}_{J_n} = \int \frac{x' \, dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + n2 \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \underbrace{\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}}_{J_n} - 2n a^2 \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}}_{J_{n+1}}$$

$$(2n-1) J_n = 2n a^2 \, J_{n+1} - \frac{x}{(x^2+a^2)^n}$$

Quindi

$$2n-1 = 2(n-1)-1 = 2n-3$$

Integrali definiti

Teorema Fondamentale del calcolo

Sia I un intervallo e $f \in C(I)$

(1) Se $F' = f$ su un intervallo I $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b := F(b) - F(a)$

FORMULA DI NEWTON-LEIBNIZ

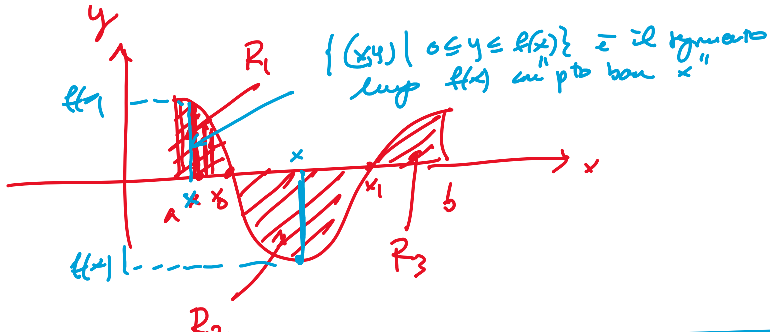
INCREMENTO DI F tra a e b

(2) $\forall x_0 \in I$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt =: F(x, x_0)$ = funzione integrale con pto base x_0

è una primitiva di f

(vi ho fatto vedere che (2) $\Longrightarrow$ (1), la dim di (2) la vedremo in AM(20))

Abbiamo "definito" $\int_a^b f(x)$ di una funzione continua o continua a tratti come "l'area con segno" della "regione compresa tra G_f e l'asse delle x"



$$\boxed{\int_a^b f(x) = \text{area}(R_1) - \text{area}(R_2) + \text{area}(R_3)}$$

$R_1 = \{(x,y) \mid a \le x \le x_0,\ 0 \le y \le f(x)\}$

$R_3 = \{(x,y) \mid x_1 \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

$R_2 = \{(x,y) \mid x_0 \le x \le x_1,\ f(x) \le y \le 0\}$

Strumenti per il calcolo degli integrali definiti

1 T.F.C.

2 "Cambio di variabile" o "per sostituzione" E, I intervalli

$f \in C(E, I)$ (f continua da $E \to I$), $\varphi \in C^1(I)$

Dim. Sia $x_0 \in E$ $\quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, per TFC (1) $F' = f$

applicato a $(F\circ\varphi)(t)$

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi\ \varphi' \underset{\uparrow}{=} \int_\alpha^\beta F'\circ\varphi\ \varphi' = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(F\circ\varphi)\,dt \overset{TFC(1)}{=} F\circ\varphi(\beta) - F\circ\varphi(\alpha)$$

TFC. (2)

$$= F(b) - F(a)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_a^b F'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

TFC(1)

TFC (1) applicato a $F(x)$

Integr. per parti $\quad \int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \quad (*)$

Dim. Per la linearità dell'integrazione $\left(\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \right)$

$$(*) \iff \int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$$

$$\int_a^b (fg)'\,dx \underset{\uparrow}{=} [(fg)]_a^b \quad ✓.$$

TFC (1)

[X] 1576 Si può calcolare $\int_3^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\int_2^3 \sqrt[3]{1-x^2}$ con l'aiuto della sostituzione $x = \cos t$? No

E l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$? sì.

$x = \varphi(t) = \cos t$ $\quad$ noi dovremo scegliere punti α e β t.c. $\varphi(\alpha) = a$ (estremo sinistro)

$\varphi(\beta) = b$ estremo di destra

Quindi nel primo caso non si può fare perchè $\nexists$ α, β t.c. $\cos\alpha = 3$ e $\cos\beta = 2$

Nel secondo caso si $\quad \alpha = \arccos\frac{1}{2}$ $\quad \beta = \arccos 1 = 2k\pi$ (qualunque k)

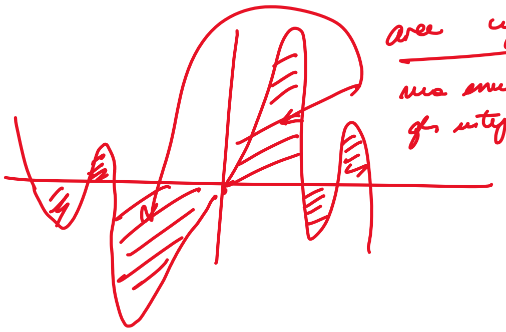
1523 $$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy = \int_1^4 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^{3/2}}\right)dy \underset{\uparrow}{=} \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 + \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_1^4$$

$$\left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{y^2} \qquad \int y^{-3/2} = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2\frac{1}{\sqrt{y}}$$

1560 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x) = 0$ $\qquad$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{101} dx = 0$

NB se f è dispari ossia $f(x) = -f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



aree uguali

ma essendo $f(x) = -f(-x)$ gli integrali hanno segno opposto.

se f è pari $\underline{f(x) = f(-x)}$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Es. 1595 Dimostrare queste formule

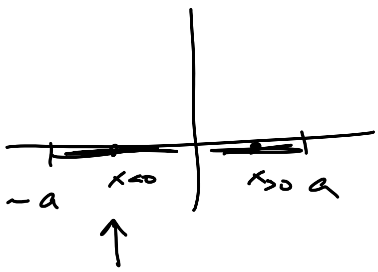
Supponiamo f dispari $\qquad \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$

additività dell'integrale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

$\forall\ a,b,c$ in I intervallo su cui f è int. a tratti

$$= \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$$

$\underline{t=-x}$ nel primo integrale.

$\varphi(t) = -t \qquad \varphi'(t) = -1$

$\int_0 \ldots \quad \int^a f(t)\,dt = -\int^a f(x)\,dx \quad$ e di nuovo $\quad f(-t) = -f(t)$

$) \; -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_0^{?} f(t)\,dt = \int_0^{?} f(x)\,dx \qquad f$ pari $\qquad f(-t) = f(t)$

e abbiamo finito

1544 $\displaystyle\int_{\lg 2}^{\lg 3} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$

/ log 2

$\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right) \qquad \mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$

$(\mathrm{th}\,x)' = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

$$= \int_{\lg 2}^{\lg 3} (\mathrm{th}\,x)'\,dx = [\mathrm{th}\,x]_{\lg 2}^{\lg 3} = \mathrm{th}\lg 3 - \mathrm{th}\lg 2$$

$$= \frac{e^{\lg 3} - e^{-\lg 3}}{e^{\lg 3} + e^{-\lg 3}} - \frac{e^{\lg 2} - \dots}{\dots}$$

$$= \frac{3 - \frac13}{3 + \frac13} - \frac{2 - \frac12}{2 + \frac12} = \frac{8}{10} - \frac{3}{5} = \frac45 - \frac35 = \frac15 \checkmark$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \\ \text{cfr. } \sum_{k=1}^N a_k = \sum_{j=1}^N a_j = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha \\ a_k = \frac{1}{k+j} \\ \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+j} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{\alpha+j} \end{array}}$$

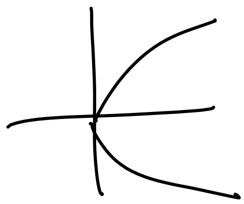
1582 $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \underset{\substack{x=t^2 \\ \sqrt{x}=t}}{=} \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = \qquad dx = 2t\,dt$

$\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots\right) \qquad t \,/\, x(t) = 0 \qquad t = \sqrt{x}$

$\boxed{x > 0 \qquad \sqrt{x} > 0}$

$= t \qquad$ DIVERSO DA $\;y^2 = x\;$ che ha due $\;y = \sqrt{x},\; y = -\sqrt{x}.$

$t^q \qquad q = \text{m.c.m.}(q_1, \dots, q_n) \qquad n=1, \; q_1 = 2$



$$= 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 1 - \frac{1}{1+t}$$

$$= 2\left(2 - [\lg(1+t)]_0^2\right) = 2\,(2 - \lg 3)$$

1597 Mostrare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$x = \cos t$

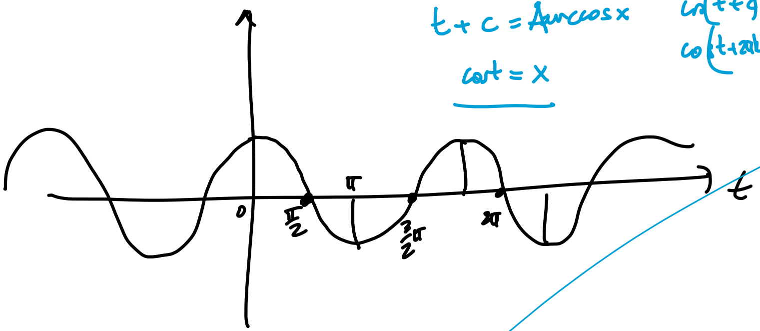
$$\int_{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t\, dt}{t} = \int_{0} \frac{\sin t\, dt}{t} = \int_{0} \frac{\quad}{x}$$

Es. Si possono trovare a e b t.c.

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{\arccos x} = \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \; ?$$

Soluzione alle 12:23

$x = \cos t$

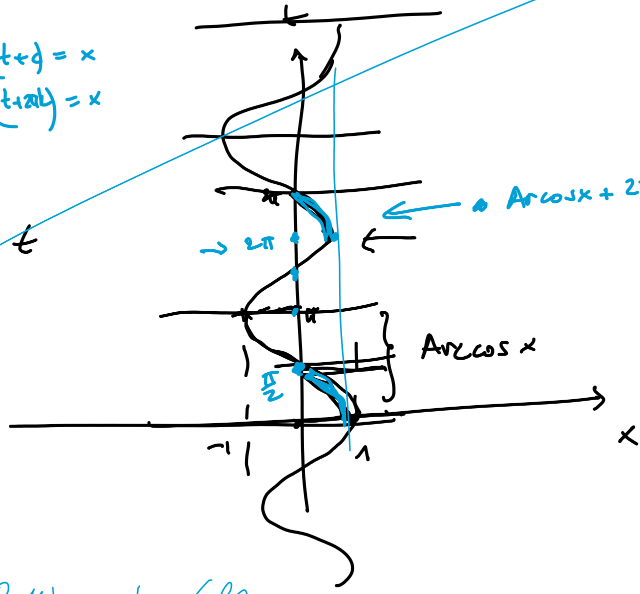


$t + c = \text{Arccos}\, x$

$\cos t = x$

$\cos(t+c) = x$

$\cos(t+2k\pi) = x$



NO

$$\int_{10}^{11} f(x)\, dx$$

$(10, 11) \subseteq dom(f)$

perché il dominio di un qualunque ramo dell'arcocoseno è $[-1, 1]$

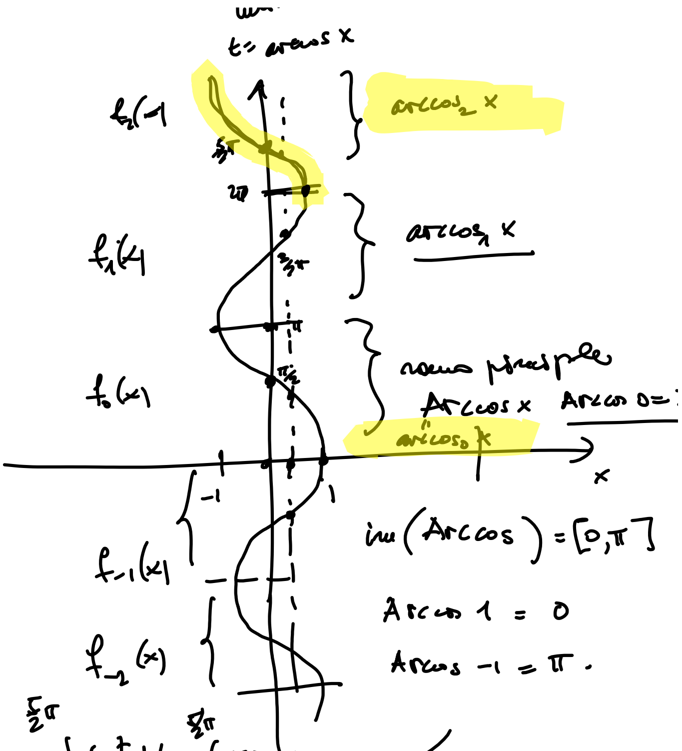
Determinare k t.c.

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos_k x}\,dx = \int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

con k=2

Prima abbiamo visto che

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos_0 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$$



Im(Arccos) = [0, π]

Arccos 1 = 0

Arccos −1 = π.

Proviamo con k=2

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos_2 x}\,dx = -\int_{\frac{5}{2}\pi}^{2\pi} \frac{\sin t\,dt}{t} = \int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad ✓$$

$t = \boxed{\arccos_2 x}$, $t \in [2\pi, \frac{5}{2}\pi]$

$\cos t = x$

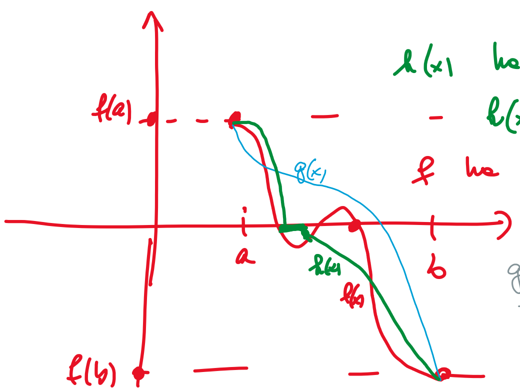
$dx = -\sin t\,dt$

Es* Sia $f(x) = x^5 - 10x^3 + 5x^2 - 8x + 10$ [Sugg. 1. Studiare $f'''(x)$ 2. Studiare f']

Studiare il grafico di f(x). In particolare, dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=0$ $(x \in \mathbb{R})$ e calcolarle approssimativamente.

Teorema (∃ zeri) $f \in C([a,b])$, $f(a)f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a,b) \mid f(x_0) = 0.$



h(x) ha infiniti $x_0 \mid h(x_0)=0$

f ha 3 zeri

g ha 1 zero.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

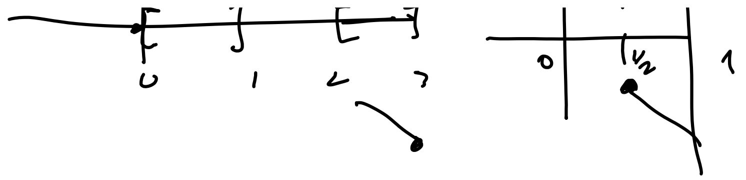
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \exists\ b>0$ t.c. $f(b)>0$.

$\exists\ a<0$ t.c. $f(a)<0$.

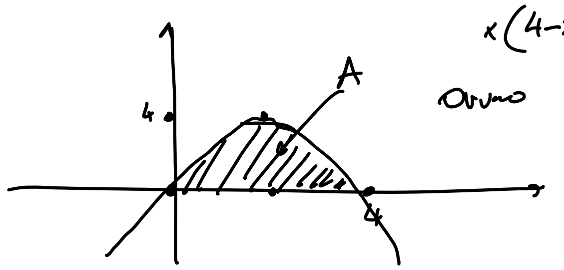
$\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a,b) \mid f(x_0)=0$

Se f o non è cont. o il dominio non è un intervallo, allora la tesi può non essere vera



1623 Calcolare l'area limitata da $y = 4x - x^2$ e l'asse delle x

$x(4-x)$



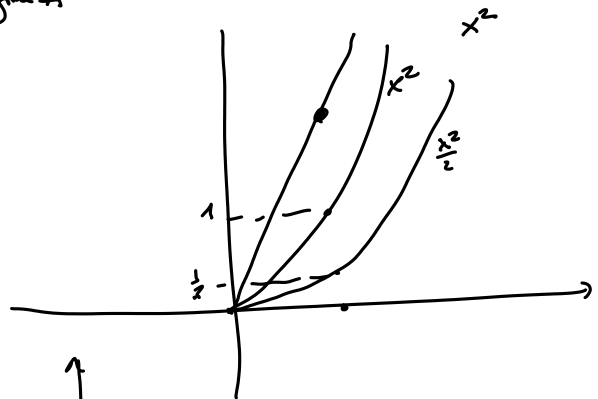
ovvero da $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4x - x^2\}$

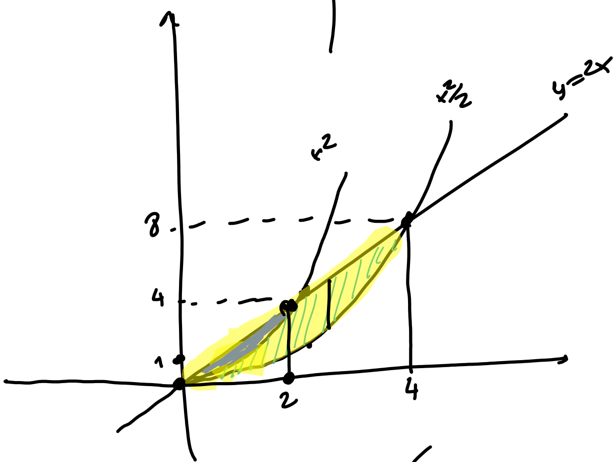
Calcolare area(A)

$$\text{area}(A) = \int_0^4 4x - x^2 = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 4 \cdot 8 - \frac{64}{3} = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3}$$

1635 Calcolare l'area della regione A compresa tra le parabole $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e la retta $y = 2x$





$x^2 = 2x$, $x = 2$

$\frac{x^2}{2} = 2x$, $x = 4$

Metodo alternativo

area A $= \int_0^2 x^2 - \frac{x^2}{2} + \int_2^4 2x - \frac{x^2}{2}$

$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_2^4 (4x - x^2)$

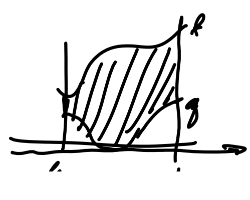
$= \ldots\ldots$

Area A = area(regione compresa tra $y = 2x$ e $y = \frac{x^2}{2}$)

− area(regione compresa tra $y = 2x$ e $y = x^2$)

Se $0 \le f \le g$ area "tra g e f" $= \int_a^b (g - f)$

$f, g : [a,b] \to [0, +\infty)$



$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^4 4x - x^2}_{\frac{32}{3}} - \int_0^2 2x - x^2$$

$$= \frac{16}{3} - \left(2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \right)$$

$$= \frac{16}{3} - \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16-4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

INTEGRALI IMPROPRI o INTEGRALI GENERALIZZATI

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \quad , \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

è cont. in $(0,1)$ e $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\int_a^b f(x)$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e/o la funzione f non è limitata in (a,b)

(f cont in (a,b))

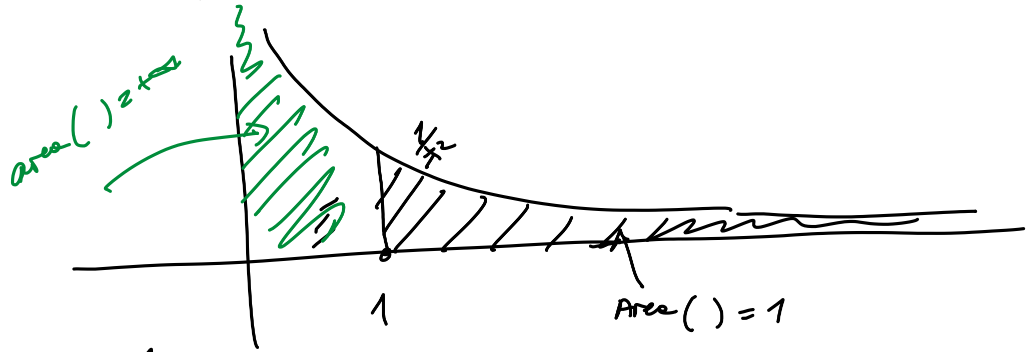
$$:= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \quad , \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

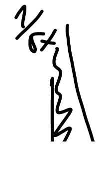
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ è cont. in $[\varepsilon, 1]$
$\varepsilon > 0$

Calcoliamo

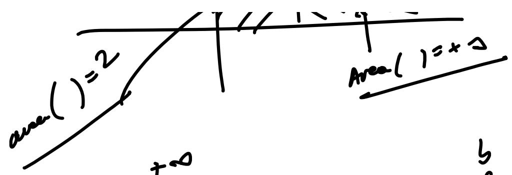
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$





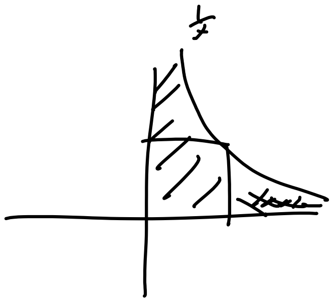
$$\int^1 \frac{1}{\ldots}\,dx$$



$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$

ma $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \left[2\sqrt{x} \right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{b} - 2) = +\infty.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty$$



Infatti
$$\int_1^\infty \frac{1}{x} = \left[\log x \right]_1^\infty = \lim_{b\to+\infty} \log b = +\infty$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\log x)_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \log \varepsilon^{-1} = +\infty$$

L'analisi degli integrali è simile allo studio delle serie

La prima domanda è: un integrale improprio è finito o no?

(poi, se possibile, calcolarlo)

CRITERI DI CONVERGENZA

(1) (confronto) $0 \le f \le g$ in (a,b) ⟹ se $0 \le \int_a^b g < \infty \Rightarrow \int_a^b f < +\infty$

$-\infty \le a < b \le +\infty$ & $\int_a^b f = +\infty \Rightarrow \int_a^b g = +\infty$

(2) (confronto asintotico) $0 < f, g$ cont., in $[a,b)$ se $\lim_{x\to b^-} \frac{f}{g} = c > 0$.

$a < b \le +\infty$ allora $\int_a^b f$ è finito $\Longleftrightarrow$ $\int_a^b g$ è finito

Analogo in $(a,b]$

allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f < \infty \iff$ converge $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ $\forall N \geq a$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ conv $\iff \alpha > 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{\infty} = \lim_{b\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) & \alpha \neq 1 \quad (\alpha > 1) \\ \left[\lg x \right]_1^{\infty} = +\infty & \alpha = 1 \end{cases}$$

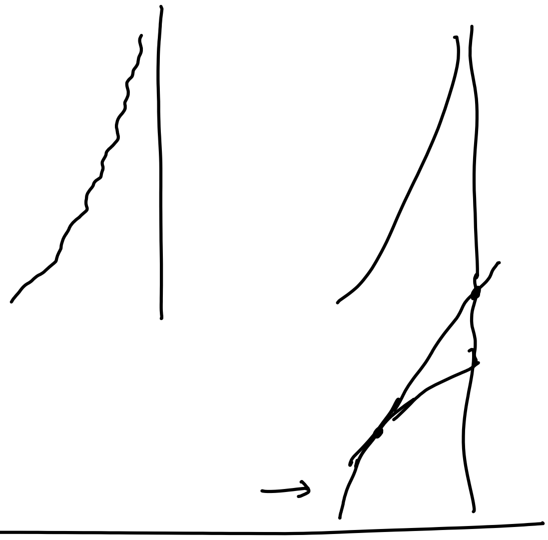
(4) crit. conv. assoluta

se $\displaystyle\int_a^b |f| < \infty \implies \int_a^b f$ è finito

e $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

ES* Studiare il grafico di $f(x) = \frac{2}{1-x} + \sin\frac{1}{1-x}$, $0 \le x < 1$

[In particolare $f'(x) > 0$, ha un asintoto verticale in $x=1$, ma ha infiniti flessi]



Giusti Es. Cap. 7° §8

113 Calcolare $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ ovviamente converge. $\frac{e^{-x}}{x^{n+2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

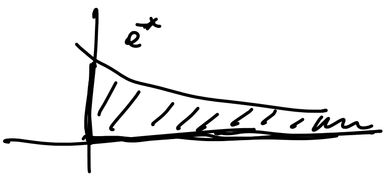
$\Rightarrow \exists M>1,\ \frac{e^{-x}}{x^{n+2}} < 1$ $\quad \int_M^{\infty} x^n e^{-x} < \int_M^{\infty} \frac{1}{x^2} < \infty$ per confronto conv..

$$n\ge 0 \quad \underbrace{\int_0^{\infty} x^n e^{-x}}_{I_n} = \underbrace{\left[-e^{-x}x^n\right]_0^{\infty}}_{} + \underbrace{n\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}}_{} = \begin{cases} n\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}}_{} & n\ge 1 \\ 1 & n=0 \end{cases}$$

$\int_0^{\infty} e^{-x} = 1$

$[F]_0^{\infty} := \lim_{M\to+\infty} [F]_0^M$

$F \in C([0,\infty))$



per $n\ge 1$ $\begin{cases} I_n = n\, I_{n-1} \\ I_0 = 1 \end{cases}$

ossia $I_n = n!$

ES Studiare il grafico di $x^n e^{-x}$ in $[0,+\infty)$

104. $\int_2^{\infty} \underbrace{\frac{\log x}{(1+x)^2}}_{f(x)}\,dx$ ovviamente converge perché

Parentesi sulle integrabilità delle potenze in 0 e in ∞

Per $\alpha \le 0$ ovviamente diverge $\quad \alpha \le 0 \quad \frac{1}{x^\alpha} \ge 1 \quad$ e $\quad \int_1^\infty 1 = +\infty$

$\int x^{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}$, $\quad \alpha \neq 1$

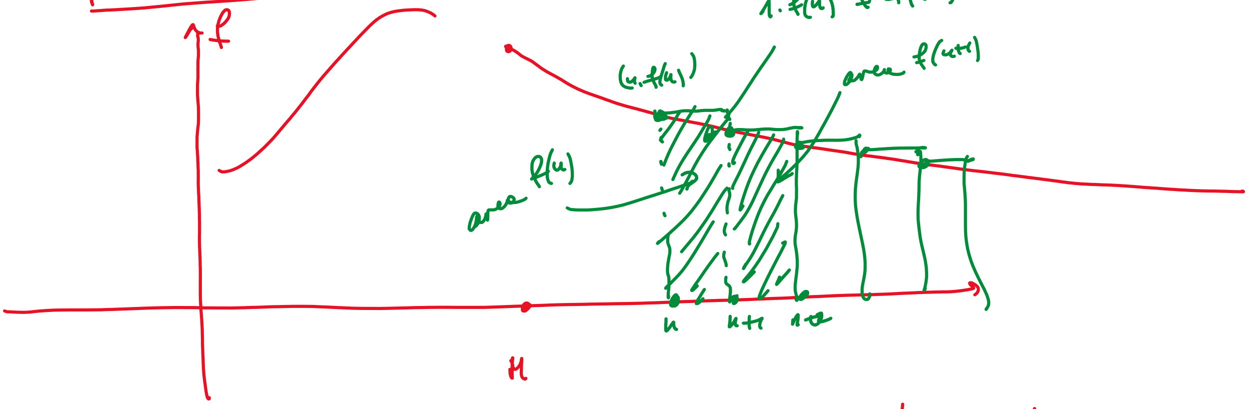
$\alpha = 1 \quad \int \frac{1}{x} = \log x$,

$\lim_{M\to\infty} \underbrace{[x]_1^M}_{} = M-1 = +\infty$

Sia $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Ricorda che $\boxed{\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1}$

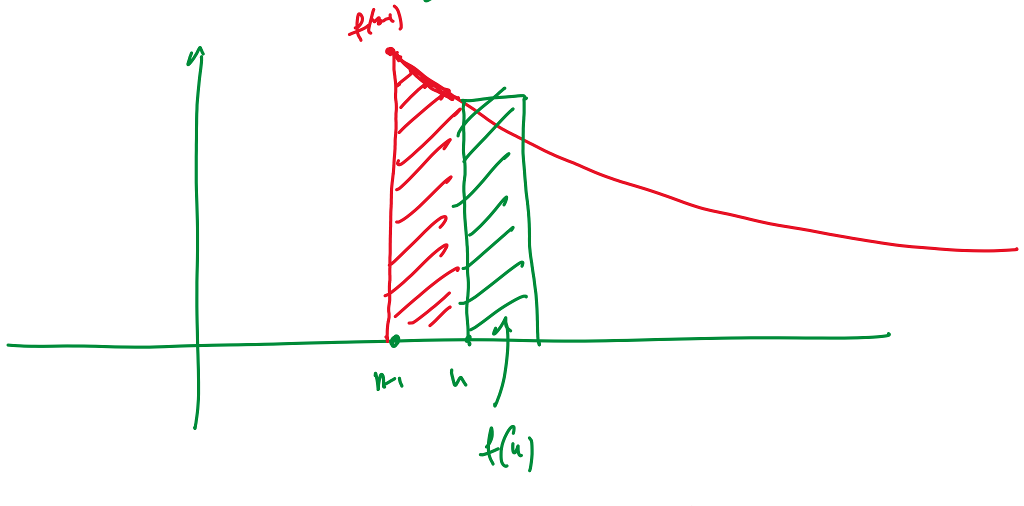


f definitivamente decrescente ossia $\exists M > 1 \mid f$ è decres. su $[M, +\infty)$

$$\int_M^\infty f(x)\,dx \qquad \sum_{n=M}^\infty \underline{f(n)}$$

$$\sum_{k=n}^\infty f(k) \ge \underline{\int_n^\infty f(x)\,dx}$$

se $\sum_{k=n}^\infty f(k)$ converge $\Rightarrow \int_n^\infty f(x)\,dx < \infty$



Os. se f è decrescente su $(n-1, \infty)$

l'area rossa è $\ge$ dell'area verde

$f(x) \geq f(n)$ ...

$$\int_{n-1}^{\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$$

& $\int_{n-1}^{\infty} f(x)\,dx < \infty \implies \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ è finita

ossia se $\int_{M}^{\infty} f$ converge allora converge $\sum_{k=M}^{\infty} f(k)$

Per quali α $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < \infty$ ovviamente se $\alpha \leq 0$ $\frac{1}{x^\alpha} \in C([0,1])$ quindi conv

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1 \qquad \alpha \neq 1$$

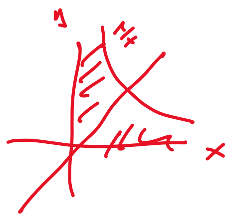
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log x \right]_\varepsilon^1 = +\infty \qquad \alpha = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right] \qquad \alpha - 1 > 0$$

$$= \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conv. } \alpha<1}}{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha>1}}{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}} = +\infty, \quad \forall \alpha$$



$$\int_2^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2} = \int_2^\infty \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \cdot \left[\frac{\log x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\int_M^\infty \frac{\lg x}{(1+x)^2} \le \int_M^\infty \frac{1}{(1+x)^{3/2}} < \infty$$

Calcoliamo
$$\int_2^\infty \frac{\lg x}{(1+x)^2} = \int_2^\infty \left(-\frac{1}{1+x}\right)' \lg x = \left[-\frac{1}{1+x}\lg x\right]_2^\infty + \int_2^\infty \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{x}$$

PER PARTI!

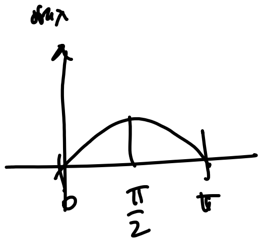
$$= \frac{\log 2}{3} + \int_2^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{\lg 2}{3} + \Big[\underbrace{\lg x - \lg (x+1)}_{\lg \frac{x}{x+1}}\Big]_2^\infty$$

$$= \frac{\lg 2}{3} - \log\frac{2}{3} = \frac{\lg 2}{3} - \lg 2 + \lg 3 = -\frac{2}{3}\lg 2 + \lg 3$$

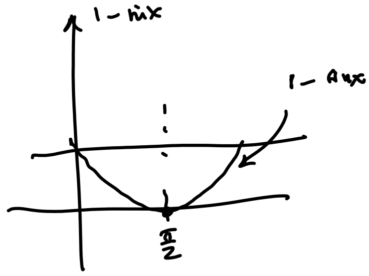
E 107
$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}$$

Prima di calcolare cerchiamo di capire se l'integrale converge!

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}$$



Prima oss
$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}$$
poiché $\sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2}+x)}$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}$$

||

$x = \frac{\pi}{2} - y$ $\qquad y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-dy}{\sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2}-y)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-\cos y}}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}-y) =$

$$1-\cos y \sim \frac{y^2}{2} \overset{\text{def}}{\iff} \lim \frac{1-\cos y}{\frac{y^2}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h)$$

per ... $\int_0 \frac{...}{\sqrt{1-\cos y}}$ ... $\int_0 ... y$

$\|$

$+\infty$

Es da 116 a 134 Dire se convergono i seguenti integrali:

120 $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx$ converge.

mont nt per $t\to 0$.

perchè in 1 è regolare e in 0 $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

e $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è int. e quindi per confronto asint. converge

(è converg.)

123 $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}\,dx$

Prov. crit. conv. ass.

per confronto con $\frac{1}{x}$

$\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{x}$ $\forall x \geq 1$

$\int \frac{|\sin x|}{\log x} \leq \int \frac{1}{\log x} = +\infty$

(Cfr Es* 134) criterio analogo al criterio di Leibniz per serie

$(-1)^n$ è periodica di periodo 2 con max $=1$ e min $=-1$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

$$\int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x} = \left[-\frac{\cos x}{\log x}\right]_2^\infty - \int_2^\infty \frac{\cos x}{\log^2 x}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\cos 2}{\log 2} - \int_2^\infty \frac{\cos x}{\log^2 x}\frac{1}{x}$$

$\left(\frac{1}{\log x}\right)' = -\frac{1}{(\log x)^2}\frac{1}{x}$

è convergente!

$\sin x$ è periodica di periodo 2π con max $=1$ e min $=-1$ e $-1 \leq \sin x \leq 1$

perchè $\int_2^\infty \left|\frac{\cos x}{x\log^2 x}\right| \leq \int_2^\infty \frac{dx}{x\log^2 x}$

$$= \int_2^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}$$

$\Sigma \frac{1}{n\log^2 n}$

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Sono equazioni che coinvolgono una funzione incognita $x(t)$ e la sua derivata

Esempi

(1) $x'(t) = f(t)$ per una data $f(t) \in C(I)$ intervallo

(2) $x' + x = \sin t$, $x = x(t)$

(3) $x' = x^2$

Esempio (1): $x'(t) = f(t) \iff x$ è una primitiva di f

e per il se $t_0 \in I$, integro l'E.D. tra t_0 e $t \in I$

T.F.C $\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$

T.F.C

Non $\cancel{\int_{t_0}^{t} x'(t)\,dt}$

$x(t) - x(t_0)$

Quindi le soluzioni $x(t)$ di (1) sono date da

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \quad \text{con } x_0 = x(t_0)}$$

NB. le soluzioni di $x' = f(t)$ sono infinite e dipendono da un parametro reale x_0

o equivalentemente se $F' = f$ ossia F è una primitiva di f

$x(t) = c + F(t)$

In particolare se consideriamo il seguente PROBLEMA DI CAUCHY (o AI VALORI INIZIALI)

$x(t_0) = x_0$

allora (C1) ha una ed una sola soluzione data da

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Esempio

$$\begin{cases} x' = \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

$$x(t) = 2 + \int_0^t \sin s\, ds$$
$$= 2 + 1 - \cos t$$
$$= 3 - \cos t$$

(2) $x' + x = \sin t$

ED lineare non omogenea

x e x' appaiono linearmente

$x' + x = 0 \Leftrightarrow x' = -x$ ad esempio $x = e^{-t}$

ED. lineare omogenea

moltiplico per e^t la (2)

$$e^t x' + e^t x = e^t \sin t$$
$$\parallel$$
$$(e^t x)'$$

se pongo $y = e^t x$ ottengo

$y' = \underbrace{e^t \sin t}_{f(t)}$ e sono ricondotto al problema (1).

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^s \sin s\, ds$$

lo sappiamo calcolare esplicitamente.

$$e^t x(t) = e^{t_0} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^s \sin s\, ds$$

con $x_0 = x(t_0)$. da cui

$$x(t) = e^{t_0 - t} x_0 + e^{-t} \int_{t_0}^{t} e^s \sin s\, ds$$

$x' + x = \sin t$

(3) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ ← t,0 ... (1 ... non come $a \cdot x$)

(**NB** $\dot{x} = x' = Dx = \frac{d}{dt} x$)

Newton — Lagrange — not. moderna — Leibniz

$x_0 = 0$ $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ha come unica soluzione $x(t) \equiv 0$.

$x_0 \neq 0$ $x(0) = x_0 \neq 0$ $\dot{x} = x^2$

$x(t)$ sarà una soluzione C^1 (se $x(t)$ è cont. $\Rightarrow \dot{x} = x^2$ è continua cioè $x \in C^1$, e derivando la relazione)

$x'' = 2 x x' \Rightarrow x'' \in C$ ovvia

$x \in C^2 \Rightarrow$ continuando $x \in C^\infty(I)$

Se $x(0) = x_0 \neq 0 \Rightarrow x(t)$ sarà ancora diverso da zero in un intorno di $t_0 = 0$

e l'ED per t vicini a 0 è equivalente a

$$\frac{\dot{x}}{x^2} = 1$$ ora, come prima, integro tra 0 e t

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)^2}\, ds = \int_0^t ds = t$$

(è un integrale facile in cui chiamo $\int f(x)\, \dot{x}\, ds = \int f(x)\, dx$ con $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x(s)$, $\dot{x}\, ds = dx$

cambio di variabile!)

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

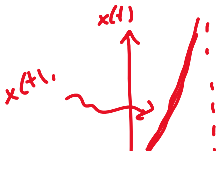
In conclusione,

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t$$

ossia

$$\frac{1}{x_0} - t = \frac{1}{x(t)} \qquad \boxed{x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}}$$

Qual è il dominio di $x(t)$? ha un asintoto verticale in $\bar{t} = \frac{1}{x_0}$



Verifichiamo $x(0) = x_0$ ✓

$$= \left(\frac{x_0}{1-tx_0}\right)' = x(t)$$

il dominio di $x(t)$ è $(-\infty, \bar{t})$ ($x_0>0$)

E.D. lineari del primo ordine o sono E.D. della forma

$$x' + \alpha(t)x = f(t)$$ con α e f funzioni di t assegnate e continue

$$\underbrace{a(t)x'(t) + b(t)x}_{\text{combinazione lineare di } x' \text{ e } x} = g(t)$$

con $a(t) \neq 0$ e quindi dividendo per $a(t)$ ottengo l'equazione di prima,

o anche il Prob. di Cauchy $\begin{cases} x' + \alpha(t)x = f \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$$x' + \alpha(t)x = f$$

fisso $A(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds$ $\quad t_0 \in I, \quad \alpha, f \in C(I)$

e moltiplico per $e^{A(t)}$

$$\underbrace{e^A x' + \alpha e^A x}_{(e^A x)'} = e^A f$$

$$(e^A)' = e^A A' = e^A \alpha$$

e, come prima,

$$\int_{t_0}^{t} (e^A x)' = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\,ds$$

|| T.F.C.

$$e^{A(t)} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\,ds$$

$x_0 := x(t_0)$

$x(t) = \ldots$ t_0

è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + \alpha x = f \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

E.D. del primo ordine a variabili separabili

$$\begin{cases} x' = f(x)\, g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se $f(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$

se $f(x_0) \neq 0$ divido per $f(x)$

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t), \quad \int_{t_0}^{t} \frac{x'}{f(x)}\, ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)}$$

N.B. l'E.D. del primo ordine più generale è della forma

$$F(x', x, t) = 0.$$

e se possiamo esplicitare la x'

$$x'(t) = f(x, t)$$

Esercizi del sito di Tor Vergata

ES (3)

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} = \frac{1-y}{t} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

la soluzione è $\boxed{y(t) \equiv 1}$

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

N.B è sia un'equazione lineare che un'equazione a variabili sep

$$y' + \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha(t)}}{\frac{1}{t}}\, y = \underset{\substack{\uparrow \\ f(t).}}{\frac{1}{t}}$$

oppure

$$y' = \frac{1-y}{t} = f(y)\, g(t)$$

con $f(y) = 1-y$

e $g(t) = \frac{1}{t}$

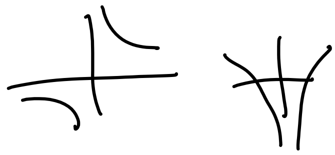
$$\begin{cases} \dfrac{y'}{1-y} = \dfrac{1}{t} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_1^t \frac{y'}{1-y}\, ds = \int_1^t \frac{1}{s} = \Big[\log|s|\Big]_1^t = \log|t|$$

$y = y(s)$

$$\int_2^{y(t)} \frac{dy}{1-y} = \Big[-\log|1-y|\Big]_2^{y(t)}$$

$$\int \frac{1}{x} = \log|x|$$



$$= -\log|y(t)-1|$$

$$\log|y(t)-1|^{-1} = \log|t|$$

$$|y(t)-1|^{-1} = |t|$$

$$\frac{1}{|y(t)-1|} = |t|$$ per $t-1$ piccolo ovvia t vicino a 1

$y(t)-1 > 0.$

$$\frac{1}{y(t)-1} = t$$ per $|t-1| < \varepsilon.$ per un certo ε

$$y(t)-1 = \frac{1}{t}, \qquad \boxed{y(t) = 1 + \frac{1}{t}}$$

$y(t)-1 > 0$, se $t > 0$

$t_0 = 1$

La soluzione è data da $y(t) = 1 + \frac{1}{t}$ con $t \in (0, +\infty)$

Es! trovare la soluzione usando la formula risolutiva dell'equazioni lineari

---

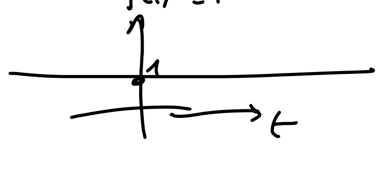
Es (10)

$$\begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ a variabili separabili

Qual è l'equilibrio (ossia la soluzione costante $y(t) \equiv y_0$) di

$y' = 2t\sqrt{1-y^2}$, $y_0 \equiv 1$ $\quad y(t) \equiv 1.$ $\quad y(0) = 1$ $\quad y(t) \equiv 1$

$\forall t$, $2t\sqrt{1-y_0^2} = 0$



di $\quad x' = f(x)\, g(t)$ $\quad$ trovo gli zero di f, cioè trovo le $x_0 \mid f(x_0)=0$

se $f(x_0)=0$. $\quad x \equiv c \quad x'=0 = f(0)\, g(t) \neq 0$ se $g(t)\neq 0$

(a meno che $f(0)=0$).

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2t \\ y(0)=0 \end{cases}$$

e integrando $\displaystyle\int_0^t \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}\, ds = 2\int_0^t s\, ds = t^2$

$$\| $$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \Big[\operatorname{Arcsin} y\Big]_0^{y(t)}$$

$= \operatorname{Arcsin} y(t)$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = \sin t^2}$$

Verifica $\quad y(0)=0$ ✓

$$y' = (\cos t^2)\, 2t = \sqrt{1-(\sin t^2)^2}\cdot 2t.$$

$\uparrow$

$\cos s > 0$ per s piccolo. $\qquad \cos s = \sqrt{1-\sin^2 s}$, $\cos s = t^2$

$= 2t\sqrt{1-y^2}$ ✓ $\qquad \sin^2 t^2$

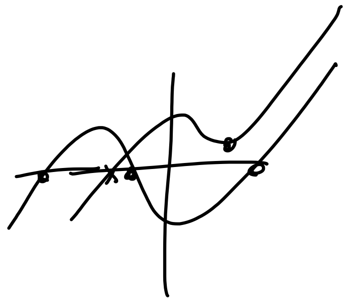
$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 5x^2 - 8x + 10$$

Vogliamo fare il grafico

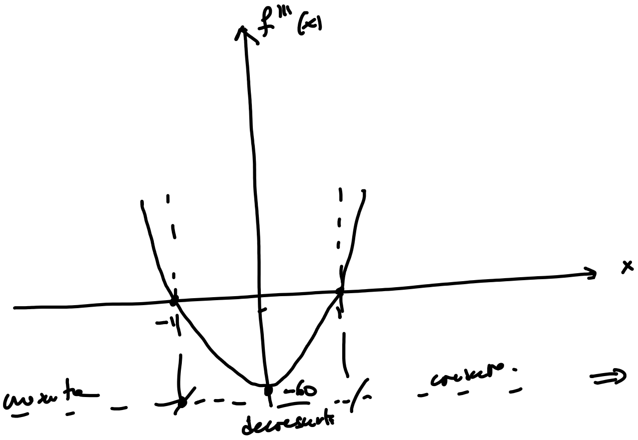
Calcolare le radici reali di f con 3 cifre significative

$$f' = 5x^4 - 30x^2 + 10x - 8$$

$$f'' = 20x^3 - 60x + 10$$



$$f''' = 60x^2 - 60 = 60(x^2 - 1)$$



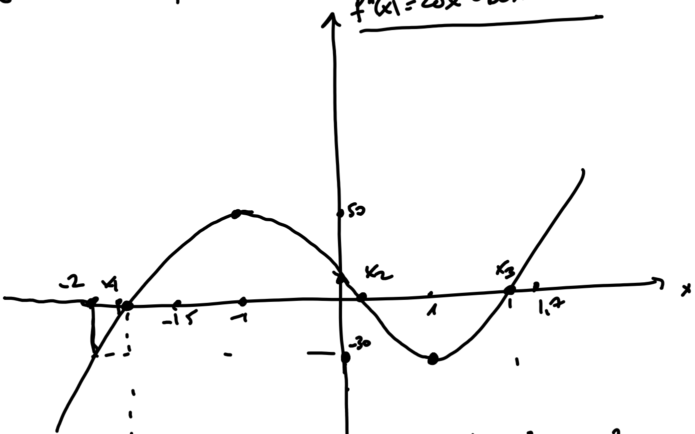
$\Rightarrow$ -1 è un pto di max loc stretto di f''

1 è " " min loc stretto di f

f'' è neg in $(-\infty, 1)$

$f''(-1) = 50$, $f''(1) = -30$

$$\boxed{x \longmapsto 20x^3 - 60x + 10}$$



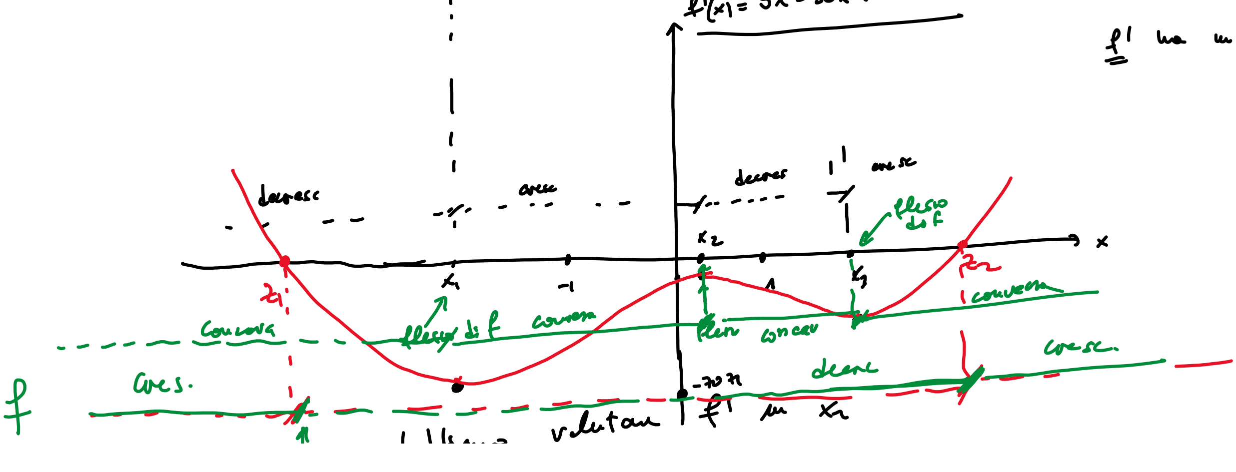
$f''(x_1) = 0$

$x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$

f' ha un minimo rel stretto in x_1

max x_2

min x_3



x	f'
-2	-68
-2.5	-25
-3	97
-2.7	12
-2.6	-8

z_1 è un max locale

z_2 è un min locale

$\boxed{z_1 = -2.64\ldots}$

x	$f''(x)$
-2	-30
-1.5	32.5
-1.9	-13.179
-1.8	1.36
-1.85	-5.67
-1.84	-4.19
-1.81	0.005
-1.82	-1.371

x	f''
0.25	-4.68
0.2	-1.84
0.18	-0.611
0.15	1.067
0.16	0.491
0.17	-0.101

x	f''
1.7	6.26
1.5	-12
1.6	-4.08
1.65	0.842
1.64	-0.181

x	f'
2	-28
2.5	24
2.4	9.08
2.3	-3
2.35	2.3
2.34	1
2.33	-0

$\boxed{z_2 = 2.33\ldots}$

$x_3 = 1.64\ldots$

$x_2 = 0.16\ldots$

$-1.82 < x_1 < -1.81$

$\boxed{x_1 = -1.81\ldots}$

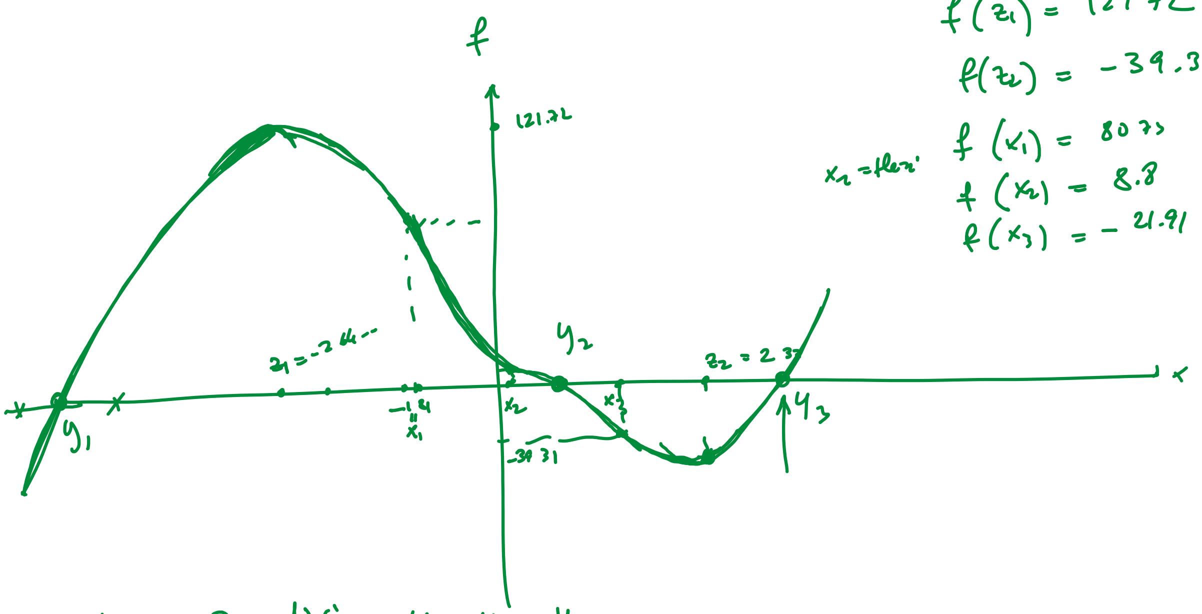
$f'(-1.81) = -70.71 \Rightarrow f'(x_1) = -70.71\ldots$

$f'(-1.82) = -70.71$

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots$

$f'(0.16) = -7.16 \Rightarrow f'(x_2) = -7.16\ldots$

$f'(1.64) = -36.118 = f'(x_3)$



$f(z_1) = 121.72$

$f(z_2) = -39.31$

$f(x_1) = 80.73$

$f(x_2) = 8.8$

$f(x_3) = -21.91$

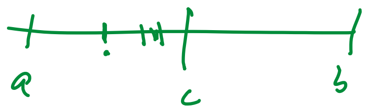
f ha 3 radici y_1, y_2, y_3

Calcoliamo y_3 con 3 cifre decimali significative

x	$f(x)$
2	$-$
2.5	$-$

2.98 | +
2.975 | +
2.973 | −
2.974 | +

$$\boxed{y_3 = 2.973\ldots}$$

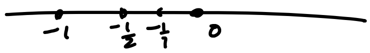


$f(c)>0$

[GE] Cap 4 es 30

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x}{1+4x}\right)^n$$

$1+4x \neq 0$. $x \neq -\frac{1}{4}$



Si studia la convergenza assoluta

ATTENZIONE non bisogna, in generale, sostituire x con $|x|$!!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\underbrace{\left(\frac{1+x}{1+4x}\right)^n}_{a_n}\right| \qquad \left(\begin{array}{c}\sum a_n \\ \sum |a_n|\end{array}\right)$$

$$|a^n| = |a|^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1+x}{1+4x}\right|^n$$

$a_n(x) = \frac{1+x}{1+4x}$, $a_n(0) = 1$ $\forall n \geq 0$

Cr. Radice

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+x}{1+4x}\right| = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \underline{1} & x = 0\end{cases}$$

$x=0$ la serie diverge essendo $a_n = 1$

e converge ass. per $x \neq -\frac{1}{4}$ e $x \neq 0$.

$\sum (-1)^n$ non conv. è ind.

$\sum 2^n$ non conv. diverge a $+\infty$

---

47 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lg x)^{\lg n}}$$

$x>0$, $x \neq 1$

$x>1$ $\lg x > 0$

$$\sum \frac{1}{a^{\lg n}}, \quad a = \lg x > 0.$$

$$n = e^{\lg n}$$

converge se $\underline{\log x > 1}$,

converge se $\boxed{\log \log x > 1}$, diverge se $\log \log x \leq 1$

CONVERGE se $\underline{x > e^e}$, DIVERGE se $x \leq e^e$

Eqni diff. ordinarie del 2° ordine a coeff. costanti

(1) $\boxed{a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0}$ a, b, c costanti, $x = x(t)$

In generale per eqni del 2° ordine il problema di Cauchy (o ai dati iniziali) è:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(\dot{x}, x, t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$ (forma generale)

Caso dell'eqne di Newton

$\underset{\text{accelerazione}}{m\ddot{x}} = \underset{\text{forza che agisce sul punto materiale } x(t)}{f(\dot{x}, x, t)}$

$x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$. $\Rightarrow$ determina (in generale) un'unica soluzione.

$f = 0$ $m\ddot{x} = 0$

$x = c + vt$ c, v costanti

$\dot{x} = v$, $\ddot{x} = 0$

soluzione generale

e $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$ $\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t.}$

(1) è un'equazione omogenea ossia non c'è il termine $f(t)$.

ed è lineare in x e $\dot{x}$ ossia

se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni di (1) $\Rightarrow$ $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ è soluzione

$$a(Ax_1 + Bx_2)'' + b(Ax_1 + Bx_2)' + c(Ax_1 + Bx_2)$$

$$= A\underbrace{(a\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1)}_{=0} + B\underbrace{(a\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2)}_{=0} = 0.$$

Alcuni casi semplici

$\ddot{x} + x = 0$ $\ddot{x} = -x$ $x = \cos t, \sin t$

la soluzione generale sarà $A\cos t + B\sin t$

$y''(x) + y'(x) = \sin x$

var. indip. è la x

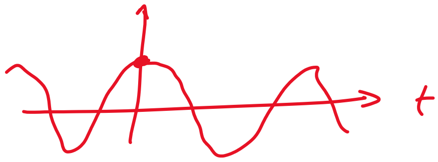
$y'(x) = \frac{d}{dx}y(x)$.

$\dot x(0)=0$ $m\ \ddot x = -kx$ m 1 0

$x(t) = A\cos t + B\sin t$

$x(0) = A = 1$ $\dot x(0) = (-A\sin t + B\cos t)\big|_{t=0} = B = 0$

$x(t) = \cos t$ è l'unica soluzione di (2)



$m\ddot x + kx = 0$, $m,k>0$

$\ddot x + \frac{k}{m}x = 0$ $\ddot x = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\ddot x = -\omega^2 x$ ha soluzioni $\sin\omega t$ $\cos\omega t$

la soluzione generale è $\underbrace{A\sin\omega t + B\cos\omega t}_{x(t)}$

↑ frequenza delle oscillazioni

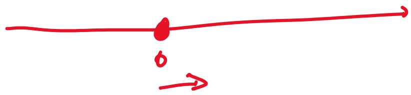
$$(3)\begin{cases} \ddot x + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot x(0) = 2 \end{cases}$$

$x(0) = B = 0$

$\dot x(0) = (A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t)\big|_{t=0} = A\omega$

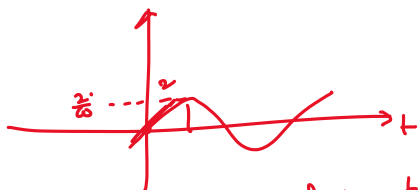
$= 2$

$\Rightarrow A = \frac{2}{\omega}$.



$x(0) = v_{iniz} = 2$

Quindi la soluzione di (3) è $x(t) = \frac{2}{\omega}\sin\omega t$



il periodo di $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ è $T = \frac{2\pi}{\omega}$

↑ frequenza.

$x(t+T) = x(t)$ $\sin(\omega(t+T)) = \sin\omega t$

$\sin(\omega t + \omega T) = \sin\omega t$

$\Leftrightarrow \omega T = 2\pi k$

$T = \frac{2\pi}{\omega}k$

periodo minimo (pos.) è $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Conclude la discussione di (1) nel caso $b=0$ e $a\cdot c>0$

Passiamo a

$\ddot x - x = 0$ $(a = 1 = -b)$

$\ddot x = x$ $x = e^t$ o e^{-t} sono soluzioni

... è $Ae^t + Be^{-t} = x(t)$

OSS

$\ddot x = f(\dot x)$

pongo $\dot x = y$

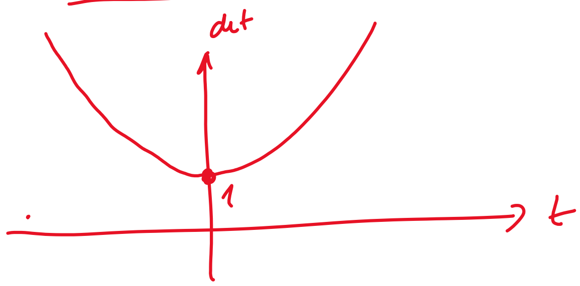
$\dot y = f(y)$

prima risolvo, poi ricavo x

$x(t) = x(0) + \int y(s)$...

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \qquad x(0)=A+B=1, \quad \dot{x}(0)=A-B=0 \iff 2A=1, \; 2B=1, \; B=\tfrac{1}{2}$$

$$x(t)=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}=\mathrm{ch}\, t.$$



$$\ddot{x}-\lambda^2 x=0, \quad \lambda>0$$

Sol. gen. $A e^{\lambda t}+B e^{-\lambda t}$ o anche $\underline{A\,\mathrm{ch}\,\lambda t + B\,\mathrm{sh}\,\lambda t}$

Dobbiamo analizzare il caso $\underline{b\neq 0}$, $\underline{a\neq 0}$, $c\neq 0$

$$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0 \qquad \ddot{x}+2\frac{b}{2a}\dot{x}+\frac{c}{a}x=0$$

(4) $$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\gamma x=0 \quad \text{con } \beta=\frac{b}{2a}\neq 0 \text{ e } \gamma=\frac{c}{a}\neq 0$$

Suggerimento. cambiamo variabile indip $\boxed{x(t)=e^{-\beta t}y(t)}$

$$\dot{x}=-\beta e^{-\beta t}y+e^{-\beta t}\dot{y}=e^{-\beta t}(\dot{y}-\beta y)$$

$$\ddot{x}=\beta^2 e^{-\beta t}y-\beta e^{-\beta t}\dot{y}-\beta e^{-\beta t}\dot{y}+e^{-\beta t}\ddot{y}=e^{-\beta t}(\ddot{y}-2\beta\dot{y}+\beta^2 y)$$

Inserendo nella (4)

$$\cancel{e^{-\beta t}}(\ddot{y}-2\beta\dot{y}+\beta^2 y)+2\beta\cancel{e^{-\beta t}}(\dot{y}-\beta y)+\gamma\cancel{e^{-\beta t}}y=0$$

$$\parallel$$

$$\ddot{y}-(\beta^2-\gamma)y=0 \qquad \beta^2-\gamma=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=:\frac{\Delta}{4a^2}$$

Quindi non c'è il termine in $\dot{y}$

Concettualmente abbiamo risolto il problema.

Infatti abbiamo tre casi a seconda che $\Delta=0$, $\Delta>0$, $\Delta<0$

con $\Delta=b^2-4ac$ discriminante dell'equaz di 2° grado $\lambda^2+2\beta\lambda+\gamma=0$. o anche dell'equaz $a\lambda^2+b\lambda+c=0$

$y(t)$	$x(t)=e^{-\beta t}y$; $\beta=\frac{b}{2a}$, $\gamma=\frac{c}{a}$

(a) $\Delta=0 \iff \beta^2=\gamma \iff b^2=4ac$

$$\ddot y - \frac{\Delta}{4a^2} y = 0 \qquad \Delta > 0$$

(1) $\Delta > 0$ $\qquad y = A e^{\sqrt{\Delta} t} + B e^{-\sqrt{\Delta} t}$

(2) $\Delta < 0$ $\qquad \ddot y + (\gamma - \beta^2) y = 0$

$$\ddot y + \frac{-\Delta}{4a^2} y = 0, \quad (\Delta < 0)$$

$$\ddot y + \omega^2 y = 0$$

con $\boxed{\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

Quindi $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

$$x(t) = A e^{-\frac{b t}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} t} + B e^{-\frac{b t}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} t}$$

$$= A e^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} t} + B e^{\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} t}$$

$= A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t}$ $\quad \Delta > 0$

dove $\lambda_\pm$ sono le soluzioni reali di

$$a \lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

N.B. Se io cerco soluzioni di (1) della forma $e^{\lambda t} = x(t)$

$\dot x = \lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot x = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$a \lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + b \lambda \cancel{e^{\lambda t}} + c \cancel{e^{\lambda t}} = 0$

EQUAZIONE CARATTERISTICA DELL'EQ. DIFF

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

$$y = A e^{-\frac{b}{2a} t} \cos \omega t + B e^{-\frac{b t}{2a}} \sin \omega t$$

$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \Delta < 0$

N.B. $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sono le due soluzioni complesse di $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad (\pm i)^2 = -1$, $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Esercizi da TU ES 3

(1) $\begin{cases} \ddot x - 5\dot x + 4x = 0 \\ x(0) = 1, \ \dot x(0) = -1 \end{cases}$

l'equaz. caratt. $\lambda^2 - 5\lambda + 4\lambda = 0$

che ha discriminante $\Delta = 25 - 16 = 9$

e quindi l'equaz. caratt. ha soluzioni reali

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1$$

$\lambda_+ \quad \lambda_-$

$$A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t} = A e^{4t} + B e^{t}$$

$x(0) = A + B = 1$

$\dot x(0) = 4A + B = -1 \qquad 3A = -2 \qquad A = -\frac{2}{3}$

$$B = 1 - A = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Gli altri esercizi di TV Es. 3 da (4) a (15) sono non omogenei

Equaz 2° ord coeff costanti Non omogenea

(6) $$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=f(t)$$

Oss non è più vero che se x_1 e x_2 sono soluzioni di (6) $\Rightarrow$ Ax_1+Bx_2 è sol di (6)

Se x_1 è sol di (6) $$a(Ax_1+Bx_2)''+b(Ax_1+Bx_2)'+c(Ax_1+Bx_2)$$
$$=A(a\ddot{x}_1+b\dot{x}_1+cx_1)+B(a\ddot{x}_2+b\dot{x}_2+cx_2)$$
$$=Af+B(\ddot{x}_2+b\dot{x}_2+cx_2)$$

$\boxed{x_p(t)}$

Se $a\ddot{x}_2+b\dot{x}_2+cx_2=0$

Morale se trovo una soluzione particolare di (6) allora le soluzione generale di (6) sarà della forma

$$x(t)=Ax_1(t)+Bx_2(t)+x_p(t)$$

con A,B costanti e x_i soluzioni dell' omogenea associata ovvero $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$

Es 3, (4)

$$\begin{cases}\ddot{x}-\dot{x}-6x=\underbrace{-e^{4t}+6}_{f(t)}\\ x(0)=0\ ,\ \dot{x}(0)=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Cerchiamo una sol particolare della forma

$$x_p(t)\quad Ae^{4t}+\underline{Bt+C}$$

$$\dot{x}_p=4Ae^{4t}+B$$

$$\ddot{x}_p=16Ae^{4t}$$

$$16Ae^{4t}-(4Ae^{4t}+B)-6(Ae^{4t}+Bt+C)=-e^{4t}+6$$

$$e^{4t}\underbrace{(16A-4A-6A+1)}-B\underbrace{-6Bt-6C-6}=0$$

$$6A+1=0\ ,\quad A=-\frac{1}{6}$$

Es! discutere il loro oscillatore armonico smorzato

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$$

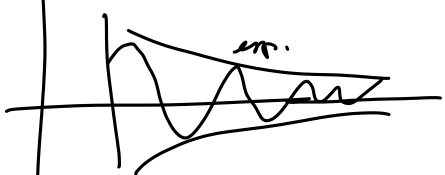
$m,\alpha,k>0$

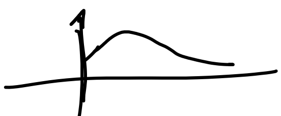
Studiare tutti i casi

$$\Delta=\alpha^2-4km$$

- interpretare le soluzioni dal punto di vista fisico

$\boxed{\lim x(t)=0}$





$x_p(t) = \ldots\, 6$

completare l'esercizio (trovare la soluzione generale dell'omogenea $\underline{A x_1 + B x_2}$

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$$

e determinare A e B t.c. $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \frac{1}{3}$.

$$x(t) = A x_1 + B x_2 + x_p(t)$$