Lezione 11 15/10/21

venerdì 15 ottobre 2021 08:08

LIMITI LATERALI

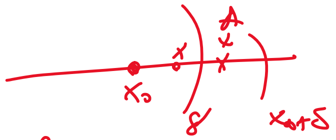
$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad \mathrm{sgn} \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{sgn}(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 = 1 \ , \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{sgn}(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$$

sgn è discont. in 0 dove ha una discont. di salto

DEF. Limite destro (o da destra)

$f: A \to \mathbb{R}$, diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un pto limite destro (o di accumulazione da destra) se $\forall \delta>0$ $(x_0, x_0+\delta) \cap A \neq \emptyset$



Se x_0 è un pto limite destro di A dom. di f

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \ | \ |f(x)-\alpha|<\varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \cap A$$

e analog. per $\alpha = \pm\infty$, $\forall M$ ....

Analog. per limiti da sinistra

(Eserc. scrivere per esteso tutte le definizioni)

Esercizio Calcolare i limiti laterali di $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, per $x \to 0$.

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\boxed{x>0, \ y = \frac{1}{x} \qquad y \to +\infty}$$

(NB. il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ è ben definito solo in $(0,+\infty)$ o $(-\infty, 0)$)

$$\lim e^{\frac{1}{x}} = \lim e^{y} = +\infty$$

$\lim_{x\to 0^+} \quad\quad \lim_{y\to+\infty}$

$0 < x < \delta \iff y = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall M>0 \quad \frac{1}{x} > M \underset{x>0}{\iff} 0<x<\underbrace{\frac{1}{M}}_{=\varepsilon}$

$\iff \lim_{y\to 0} y = 0, \quad y = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \underset{y=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0.$

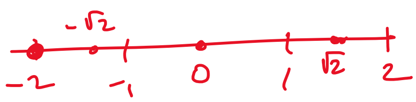
FUNZIONE PARTE INTERA E PARTE FRAZIONARIA

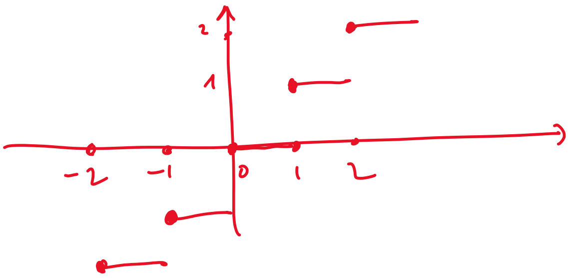
DEF. (parte intera) $x\in\mathbb{R}$, $[x] = \max\{n\in\mathbb{Z} \mid n\le x\}$

$[\sqrt{2}] = 1$ $\quad\quad [n.u_1u_2u_3\ldots] = ?$

notaz. decimale

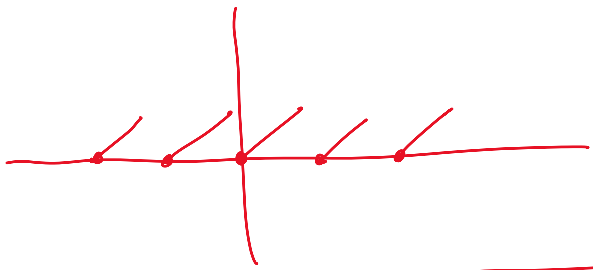
$[-\sqrt{2}] = -2$





$[x]=n$ è l'unico intero n | $n \le x < n+1$

Parte frazionaria di x, $\{x\} := x - [x]$ $\quad\quad$ NB $\{x+1\} = \{x\}$ $\forall x\in\mathbb{R}$



Es Calcolare $\lim_{x\to n^\pm} [x]$, $\lim_{x\to n^\pm} \{x\}$ per $n\in\mathbb{Z}$

ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

DEF. • $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per l'insieme $A \ (\neq \emptyset)$

se $M \geq x, \ \forall x \in A$

(Analog. definizione per minoranti di A)

• A è limitato superiormente se $\exists$ un maggiorante di A

ossia se $\overline{\mathcal{M}}_A = \{M \mid M \text{ è maggiorante di } A\} \neq \emptyset$

Se $A = \mathbb{N}$, $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{N}} = \emptyset$.

Teorema A limitato sup. Allora $\overline{\mathcal{M}}$ ha un minimo

(ossia $\exists \ \bar{s} \in \mathbb{R} \mid \bar{s} \in \overline{\mathcal{M}}$ ($\Leftrightarrow \bar{s} \geq x, \ \forall x \in A$)

e se $M \in \overline{\mathcal{M}} \Rightarrow$, $\bar{s} \leq M$)

Tale $\bar{s}$ si dice estremo superiore di A e si denota

con $\bar{s} = \sup A$

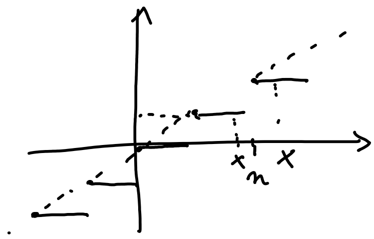
Tutto analogo per estremo inferiore: ....

↑ riempire!

Esercizi $n \in \mathbb{Z}$

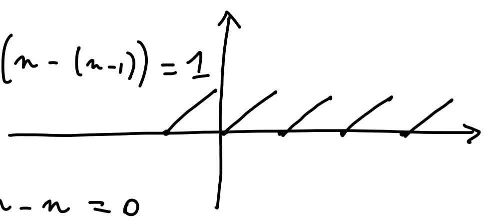
$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1$$

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n$$



$$\lim_{x \to n^-} \{x\} = \lim_{x \to n^-} (x - [x]) = (n - (n-1)) = 1$$

$$\lim_{x \to n^+} \{x\} = \lim_{x \to n^+} (x - [x]) = n - n = 0$$



[GE] Giusti esercizi

Cap. 5 Calcolare i limiti laterali.

140 $f(x) = \dfrac{x \sin x}{|x|}$ $\qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \sin x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} (-\sin x) = 0$$

$0 \in \mathbb{R}$ è punto di discontinuità eliminabile per f

---

141 $f(x) = \dfrac{x \cos x}{|x|}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \cos x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} (-\cos x) = -1$$

$0 \in \mathbb{R}$ è punto di discontinuità di salto per f

---

145 $f(x) = \dfrac{2^{x+\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ $\qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$1 = 2^0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{x+\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2^x \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2^y}{1 + 2^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{2^{-y}}_{\to 0} + 1} = 1$$

$y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2^{x+\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{\overbrace{2^y}^{\to 0}}{1 + \underbrace{2^y}_{\to 0}} = 0$$

moltiplicando num. e den. per 2^{-y}

0 è punto di discontinuità di salto per f

---

149 $$\lim_{x \to 0^+} \left(\log_3 x + \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-\log_3 y + y \right) = \lim_{y \to +\infty} y \left(-\frac{\log_3 y}{y} + 1 \right)$$

$y = \frac{1}{x}$

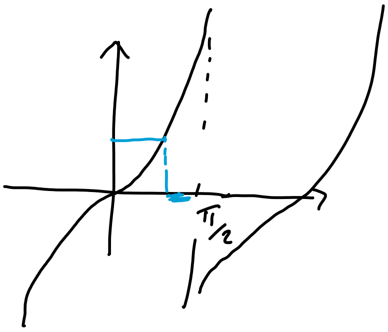
$\mathrm{Dom} = \{x > 0\}$

$= +\infty$

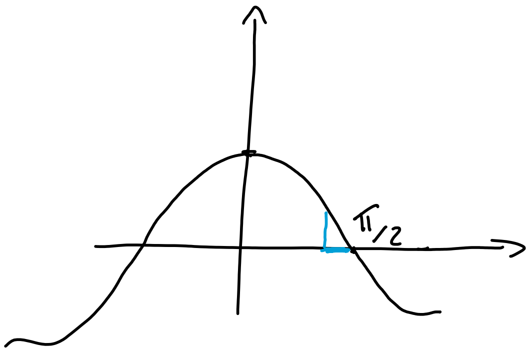
---

148 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg}\, x)^{\sqrt{\cos x}}$

$y = \mathrm{tg}\, x$



$y = \cos x$



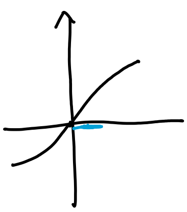
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg}\, x)^{\sqrt{\cos x}} = \lim_{y \to 0^+} \left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)^{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}} = \lim_{y \to 0^+} (\mathrm{cotg}\, y)^{\sqrt{\sin y}}$$

$y = \frac{\pi}{2} - x$

$x = \frac{\pi}{2} - y$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\cos y} + \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\, y = \mathrm{sen}\, y \\
&\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\cos y + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}(-y)} = \cos y \\
&\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\cos y}{\mathrm{sen}\, y} = \mathrm{cotg}\, y
\end{aligned}}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} (\mathrm{cotg}\, y)^{\sqrt{\sin y}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{(\cos y)^{\sqrt{\sin y}} \to 1}{(\sin y)^{\sqrt{\sin y}}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{(\sin y)^{\sqrt{\sin y}}}$$



$t = \sqrt{\sin y}$ $\;\rightsquigarrow\; = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{(t^2)^t} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t^{2t}}$

$= \lim \dfrac{1}{\ldots} = \lim \dfrac{1}{\ldots} = 1$

$\lim_{t\to 0^+} e^{\log(t^{2t})} \qquad \lim_{t\to 0^+} e^{2t\log t}$

$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log t = 0$, infatti

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log t = -\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log\frac{1}{t} \underset{\frac{1}{t}=z}{=} \lim_{z\to+\infty} z^{-\alpha}\log z = \lim_{z\to+\infty}\frac{\log z}{z^\alpha} = 0$$

limite notevole

Discutere la continuità

<u>171</u> $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad$ f è continua $\forall x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

<u>Oss.</u> $f(x) = f(-x) \implies$ se $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)$, allora $\exists \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

0 è punto di discontinuità eliminabile $\qquad f(x) := \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

è continua su tutto $\mathbb{R}$

<u>172</u> $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

$f(-x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -f(x)$

f è dispari

se $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)$, allora $\exists \lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$= -\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

f ha discontinuità di salto in 0

<u>173</u> $f(x) = x[x]$ $\qquad$ Se $x \in [n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$

$[x] = n \qquad f(x) = nx$

f è continua in ogni $x \notin \mathbb{Z}$

Sia $n \in \mathbb{Z}$

$\lim_{x \to n^+} x[x] = n \cdot n = n^2 \qquad \lim_{x \to n^-} x[x] = n(n-1) = n^2 - n$

$n^2 \overset{?}{=} n^2 - n \iff n = 0$

In 0 f è continua, mentre per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ f ha in n una discontinuità di salto

---

CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

Def. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

(i) se $x_0 \in A$ e $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq f(x_0)$

x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

(ii) se $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \alpha \neq \beta = \lim_{x \to x_0-} f(x)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

x_0 si dice PUNTO DI SALTO o DISCONTINUITÀ DI SALTO per f

(iii) se uno dei limiti laterali, $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$, non esiste o è $+\infty$ o $-\infty$, si dice che x_0 è una discontinuità ESSENZIALE

N.B. nei casi (ii) e (iii) x_0 può anche non appartenere ad A.

Esempi (i) $f(x) = \mathrm{sgn}^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0\pm} f(x) = 1 \neq 0 = f(0) \implies 0$ è una discontinuità eliminabile di f.

(ii) $n \in \mathbb{Z}$ è una discontinuità di salto per $[x]$.

(iii) 0 è una discontinuità essenziale per $\frac{1}{x}$

o per $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Es. dimostrare che $\lim_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x}$ non esiste.