Lezione 13 20-10-21

mercoledì 20 ottobre 2021 08:12

DERIVATE

Def $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a<b$

$x_0 \in [a,b]$ se $\exists$ il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (x \neq x_0)$$

$R_f(x,x_0)$ = RAPPORTO INCREMENTALE DI f

tale limite prende il nome DERIVATA DI f in x_0

Oss. La derivata in x_0 $\exists$ se $\exists$ finiti i limiti laterali e coincidono

$$\lim_{x \to x_0+} R_f(x,x_0) = \lim_{x \to x_0-} R_f(x,x_0)$$

Notazioni la derivata in x_0 di f si denota con

$f'(x_0)$ (Notazione di Lagrange)

$Df(x_0)$ $\left(Df\big|_{x_0} , \; Df\big|_{x=x_0} \right)$

$\frac{df}{dx}(x_0)$ (Not Leibnitz)

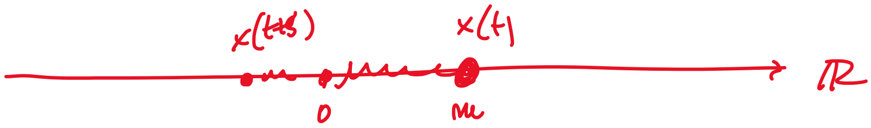
Derivata destra / sinistra $\quad D_+f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} R_f(x,x_0)$

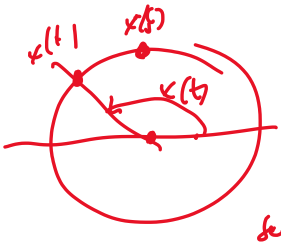
$D_-f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} R_f(x,x_0)$

Interpretazioni classiche:

1 **Velocità** $t \to x(t) \in \mathbb{R}$

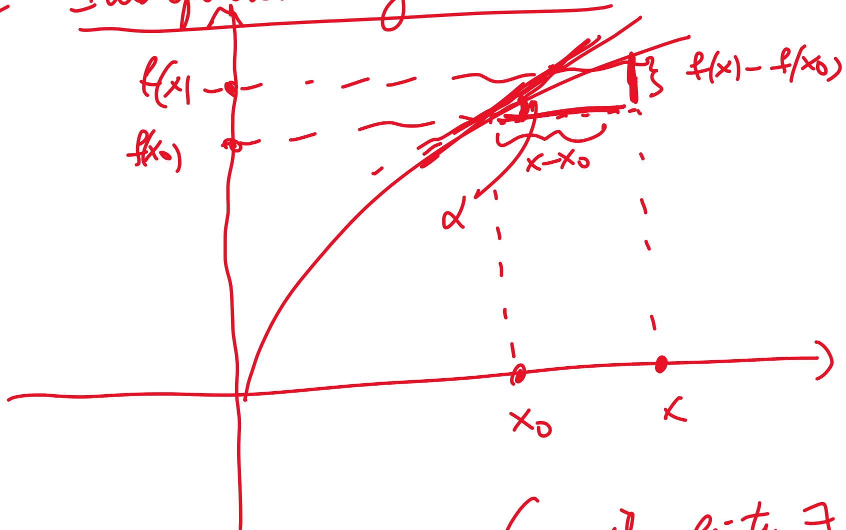
t: tempo variabile indipendente



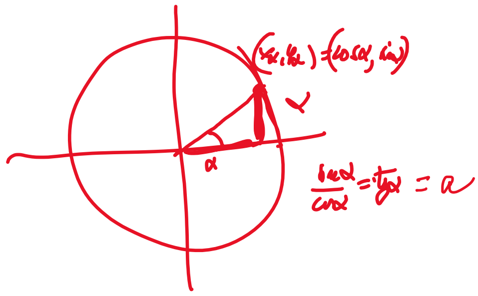


$$\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \overset{\text{se } \exists}{=} \dot{x}(t_0) = x'(t_0)$$ = la velocità istantanea del punto di coordinate x al tempo t_0.

2 **Interpretazione geometrica**



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \operatorname{tg}\alpha$$



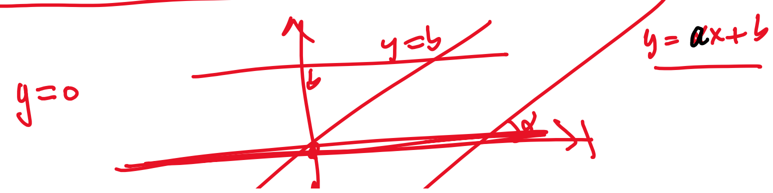
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = a$$

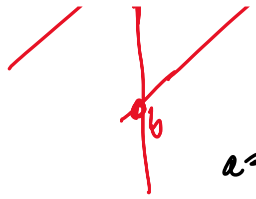
se $x \to x_0$ (e il limite $\exists$)

$R_f(x,x_0) \to$ coeff. angolare della retta tg al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Oss $y = ax+b$

$a :=$ il coeff angolare della retta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$





$a = \operatorname{tg}\alpha$ (sc∃)

Es $f(x) = ax+b$ calcoliamo la $f'(x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{ax+\cancel{b}-ax_0-\cancel{b}}{x-x_0} = a$$

$Df(x_0) = a$, $\forall\ x_0$

Es Calcoliamo la derivata di $f(x) = |x|$

Distinguiamo $x_0>0$, $x_0<0$, $x_0=0$

Se $x_0>0$ $\quad \dfrac{|x|-|x_0|}{x-x_0}$

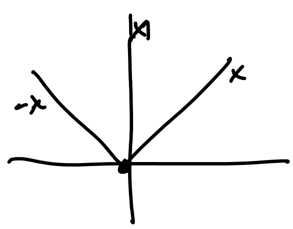
possiamo prendere $x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ dove δ_0, $x_0-\delta_0>0$.

x_0, $\frac{x_0}{2}$, $\frac{3x_0}{2}$

$$= \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \Rightarrow (D|x|)(x_0) = 1, \quad x_0>0$$

Se $x_0<0$ e $x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subseteq (-\infty,0)$ $\quad \frac{3x_0}{2}$, x_0, $\frac{x_0}{2}$

$$\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \frac{-x-(-x_0)}{x-x_0} = -1, \quad (D|x|)(x_0) = -1$$

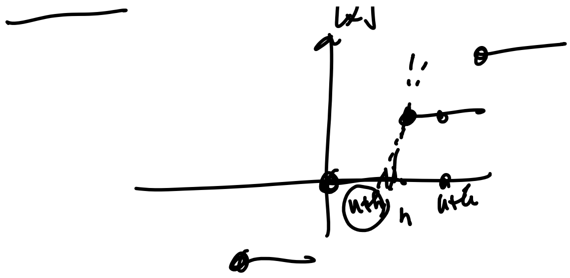


$D_+|x|(0) = 1 \neq -1 = D_-|x|(0)$

$\Rightarrow$ la derivata in 0 non $\exists$

$|x|$ non è derivabile in 0

Calcolare $[x]'$ (derivata di parte intera di x)



se $n < x_0 < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow [x]' = 0$

Oss. $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{h = x-x_0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$h>0$, $\displaystyle \lim_{h\to 0^+} \frac{[n+h]-[n]}{h} = \frac{n-n}{h} = 0$

$h<0$ $\displaystyle \lim_{h\to 0^-} \frac{[n+h]-n}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{n-1-n}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{h} = +\infty$

0 è una discontinuità essenziale della derivata

Oss Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow\, 0} = 0$$

ora a $\displaystyle \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

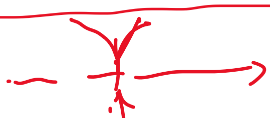
Nota $|x|$ è cont. in $x_0=0$ ma non è ivi derivabile

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

Definizione

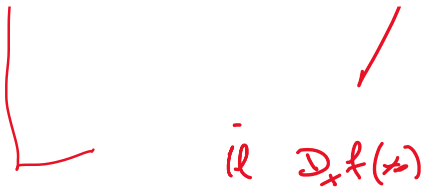
Sia f continua in x_0.

CUSPIDE



Se $\exists$ le derivate $D_\pm f(x_0)$ ma $D_+f(x_0) \neq D_-f(x_0)$ oppure

oppure $\exists$ una derivata laterale e l'altra è $\pm\infty$

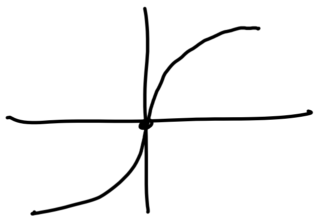


x_0 si chiama PUNTO ANGOLOSO

se $D_+f(x_0)=+\infty$, $D_-f(x_0)=-\infty \Rightarrow x_0$ è una cuspide

Es calcolare la derivata in 0 di $x^{\frac{1}{3}}$ (dom è $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Rivediamo i limiti notevoli in $x_0 \in \mathbb{R}$

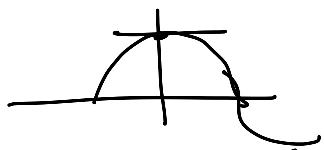
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 = (De^x)(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = (D\lg(1+x))(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = (D\sin x)(0)$$

$(D\cos x)(0) = ?$. $\displaystyle\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$(D\cos x)(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos x-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0.$$



Es calcola $(De^x)(x_0)$, $\forall x_0$

$$\lim \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim \frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

prop. dell'esp. + alg dei limiti

$$\boxed{(e^x)'(x) = e^x}$$

$f(x) = a e^x$ sono tutte e sole le funzioni t.c. $f' = f$.

(da dimostrare) ci ritorneremo alla fine del semestre

Es. $\boxed{D \log x = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0}$

$x>0$, $\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} =$

$$= \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{\left(\frac{h}{x}\right)} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right)}_{} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0}(\ \ ) = \lim_{k\to 0} \frac{\log(1+k)}{k} = 1$$

$k = \frac{h}{x}$

Es $\boxed{D \sin x = \cos x}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} = \cos x$$

Analog.

$\boxed{D \cos x = -\sin x}$

FUNZIONI IPERBOLICHE

DEF. $\sinh x$ = seno iperbolico di x $:= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x$ = coseno " " $:= \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\qquad$ $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

Es (!) Dimostrare che

$\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$

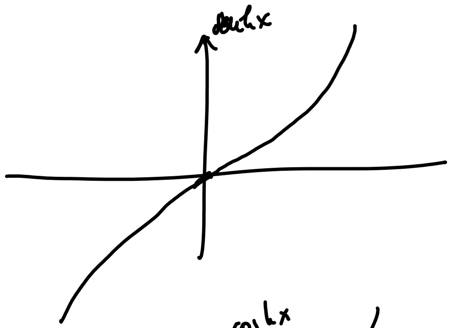
sinh è dispari

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

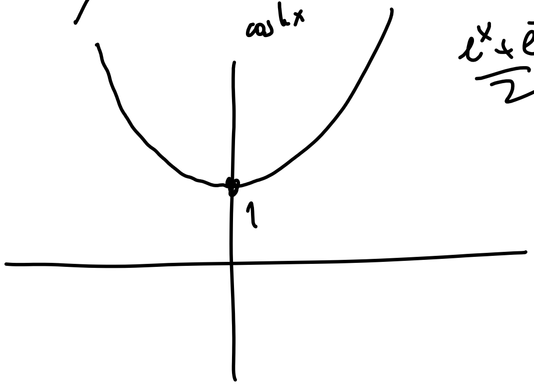
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

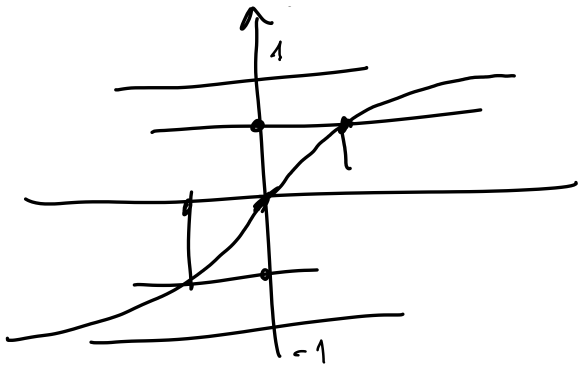


$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ dominio è $\mathbb{R}$.



$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

tgh x

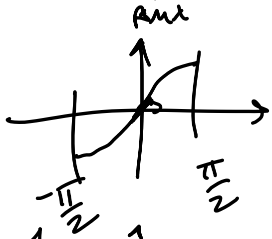


$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \text{dom. } \mathbb{R}$$

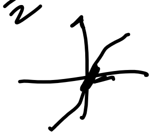
tgh x è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $(-1,1)$

ossia è una funzione derivabile e invertibile

Es Calcolare la $D(\arcsin x)(0)$



$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin h}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$



$y = \arcsin h$

$\sin y = h$