Es Calcolare usando la definizione la derivata di

$$D\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{y\to x}\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{y-x} = (Df)(x) = f'(x)$$ dove $f(t)=\frac{1}{t}$

$x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x}$, $x\neq 0$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x\cdot h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{x\,(x+h)\,\cancel{h}} = -\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)} = \cdot$$

$$\boxed{D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}}$$

$$D\,x^\alpha = \alpha\,x^{\alpha-1}$$

Derivate che conoscevamo

1) $D\,x^{-1} = -1\;x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

2) $D\frac{1}{g} = -\frac{g'}{g^2}$ $\quad (g(x)=x)$

Es. $D\sqrt{x} = D\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Ora, usando la definizione

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Fare tanti esercizi di questo tipo!

$f: I=(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile su I

$\forall\, x \mapsto Df(x) = f'(x)$ nuova funzione con dominio I

Derivate successive

$D f'$ se $\exists$ diciamo derivata seconda di F

e la denotiamo con $f''(x)$ o con $D^2 f(x)$ o $\frac{d^2 f}{dx^2}$

e così via.

In generale, iterativamente definiamo la derivata di ordine k

se è definita $f^{(k-1)}(x) = D^{k-1} f(x) \Rightarrow$

$$D^k f(x) = (D^{k-1} f)'(x)$$

Se f è derivabile k volte in I e $D^k f$ è continua in I

diciamo che $f \in C^k(I)$ (di classe C^k di I)

ossia $C^k(I) = \{ f : I \to \mathbb{R}$ che sono derivabili k volte con derivata k-ma continua su $I \}$

N.B. $f(x) = x\sqrt{|x|}$, $I = \mathbb{R}$

$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$ $\qquad f' \in C(\mathbb{R})$

$\operatorname{sgn}(x)$ è cont in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e in 0 ha un salto

$f'(0) = 0$

$$f \in C^\infty((0,+\infty)) \cap C^\infty((-\infty,0))$$

$$[\, f \in C^\infty(I) \Leftrightarrow f \in C^k(I), \ \forall k \,).$$

$$f = \begin{cases} x^{3/2}, & x > 0 \\ (-x)^{3/2}, & x < 0 \end{cases}$$

Es Calcolare $D^3 (-x)^{3/2}$, $x < 0$

$$D(-x)^{3/2} = \frac{3}{2}(-x)^{1/2}(-1) = -\frac{3}{2}(-x)^{1/2}$$

$$D^2(-x)^{3/2} = -\frac{3}{2} D(-x)^{1/2} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}(-x)^{-1/2}$$

$$D^3(-x)^{3/2} = \frac{3}{2^2} D(-x)^{-1/2} = \frac{3}{2^3}(-x)^{-3/2}$$

A noi interesserà soprattutto la derivata prima e seconda

prima → crescita/decrescita

seconda → curvatura del grafico

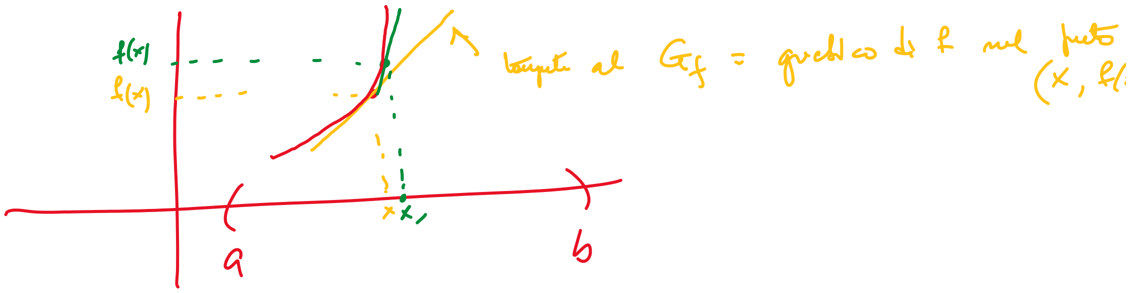
Def $f: I=(a,b)$ di classe $C^2(I)$ si dice (strettamente) convessa se

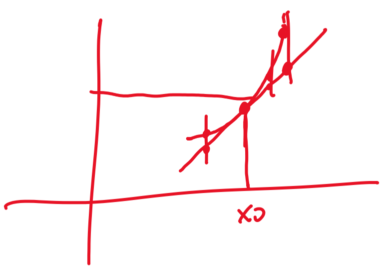
$f'' \geq 0$ su I

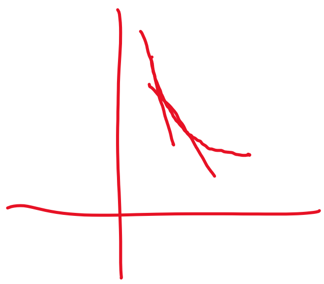
$(f''>0)$

f si dice (strett.) concava se $-f$ è (strett.) convessa

Se f è strett. convessa $\iff$ f' è strett. crescente su (a,b)







Se f è (strett.) convessa il G_f sta "sopra" la retta tg in ogni p

$$f(x) \geq \overbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{coeff angolare di questa retta}}(x-x_0) + f(x_0)}^{\text{retta tangente a } G_f \text{ in } (x_0, f(x_0))}$$

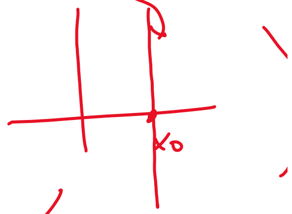
!!

$>$ (stett.)

$y =$

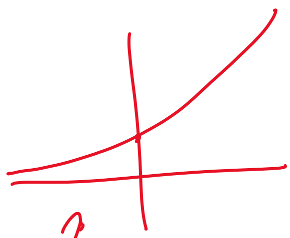
retta $\neq$ ... $y = ax+b$

$\mathbb{R}^2 \supseteq \{x = x_0\}$ = rette parallele all'asse delle ...



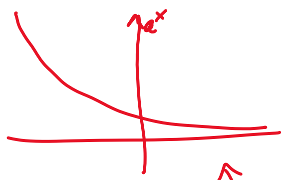
Esempio

$x \to e^x$ è convessa $\qquad De^x = e^x > 0$



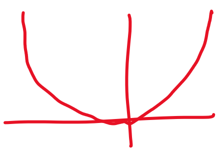
stett. crescente e stett. convessa

$x \to a^x$ è convessa ($\forall\, a \neq 1$)



stett. decrescente e stett. convessa

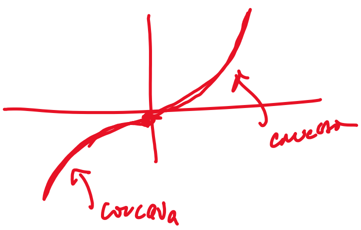
$x \to x^2$



$D^2 x^2 = 2$

$x \to x^3$ è stett. convessa su $(0, +\infty)$ $\qquad D^2 x^3 = 6x > 0$ per x ...

è stett. concava su $(-\infty, x)$ $\qquad D^2 x^3 = 6x < 0$ per $x <$ ...

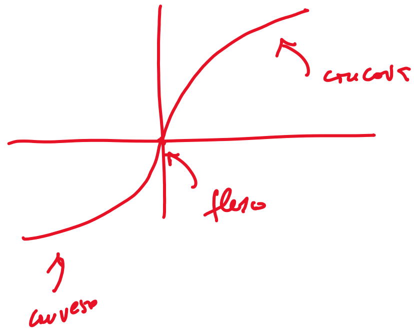


0 è un pto di FLESSO per x^3

DEF. $x_0 \in I$ è di flesso per una funzione $C^2(I)$ se $\exists\, \delta > 0$ |

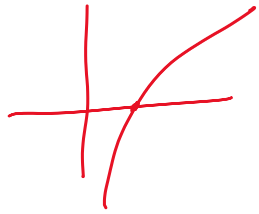
$$f''(x)\, f''(y) < 0 \quad \forall\ x_0-\delta < x < x_0 < y < x_0+\delta, \quad a \le x_0-\delta < x_0$$

- $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, $I = \mathbb{R}$



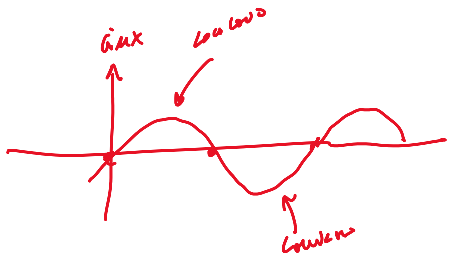
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'' = \frac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{9} x^{-5/3} < 0 \quad \text{per } x>0$$

- $\log x$ è strettamente concava su $(0,+\infty)$



$$(\log x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall\ x>0.$$

- $\sin x$ è strett. concava su $(0,\pi)+2k\pi$



$(\sin x)'' = -\sin x < 0$ per $x \in (0,\pi)$

$(\cos x)'' = -\cos x$

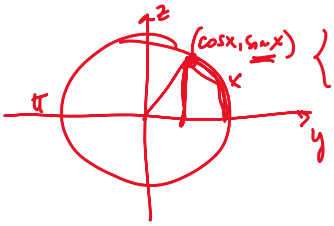
(Nota $\sin x$ e $\cos x$ risolvono l'equazione differenziale $y''+y=0$ $\quad \ddot{y}+y=0$)

$m\ddot{y} + ky = 0$

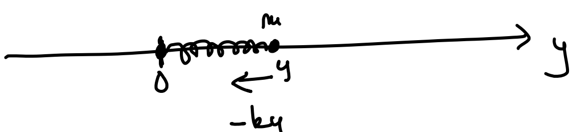
$m\ddot{y} = -ky$ — k costante di elasticità della molla

forza = m accelerazione

$\sin x > 0$ per $0 < x < \pi$



$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad y^2+z^2=1$



Le soluzioni di questa equazione differenziale sono $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

Esercizio

$$\begin{cases} \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{y} + y = 0 \end{cases}$$

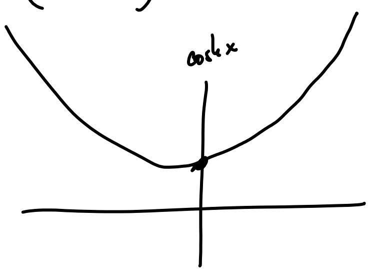
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

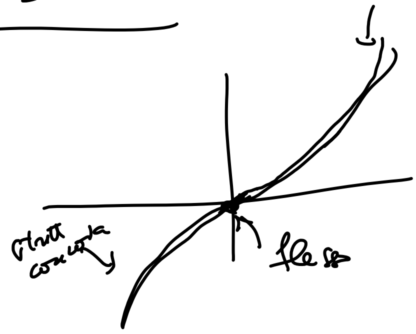
$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sinh x)'' = \sinh x$$

$$(\cosh x)'' = \cosh x$$



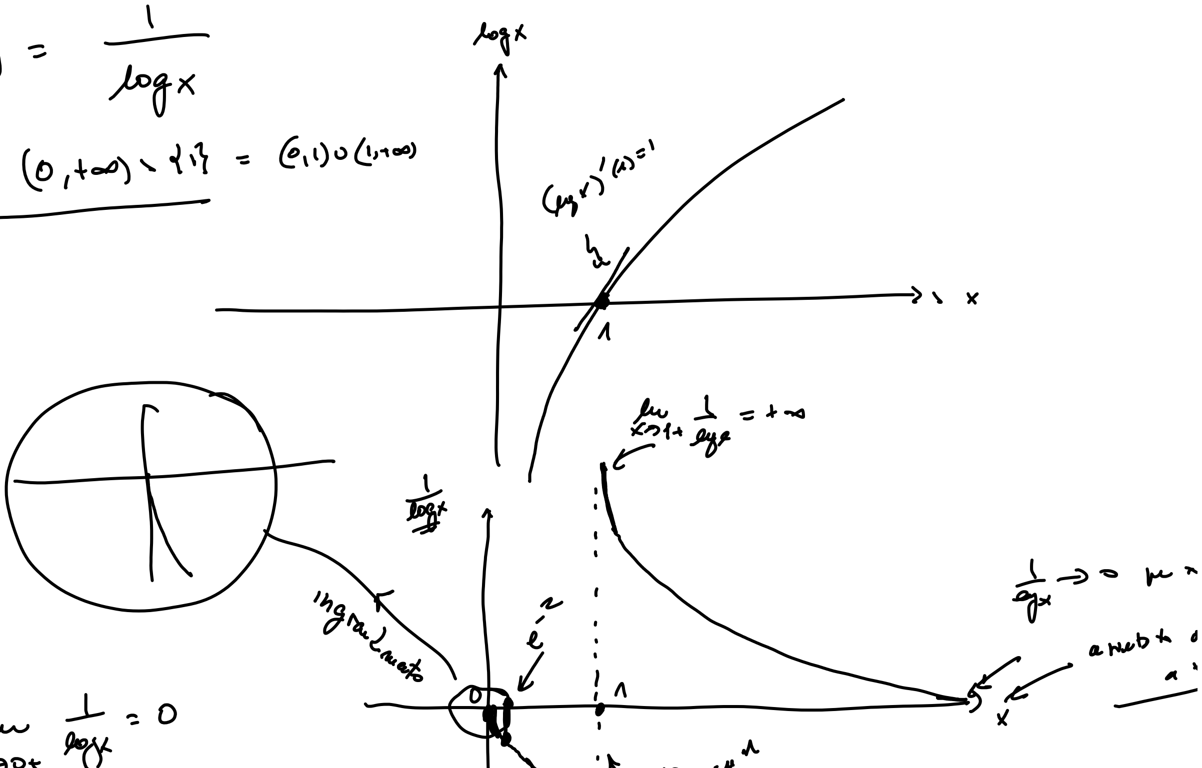
strett. convessa su $\mathbb{R}$



STUDIO DI FUNZIONI.

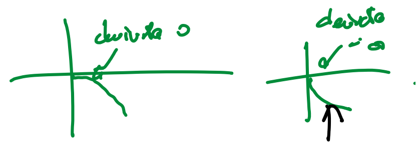
$$f(x) = \frac{1}{\log x}$$

$$A = \operatorname{dom} f = (0,+\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x} = 0$$

$\frac{1}{\log x} < 0$ per $0 < x < 1$



$$D\,\frac{1}{\log x} = -\frac{1}{x(\log x)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \log^2 x = 0$$

$\frac{1}{\lg x}$ è strett decrescente su A

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\lg x)^\beta = 0 \, , \, \underline{\alpha > 0}$

$$D^2 \frac{1}{\lg x} = -D \frac{1}{x \lg^2 x} = \frac{\log^2 x + \cancel{x} \cdot 2 \lg x \cdot \cancel{\frac{1}{x}}}{x^2 \log^4 x} \qquad \left(D \frac{1}{g} = -\frac{g'}{g}\right.$$

$$= \frac{\log x + 2}{x^2 \log^3 x}$$

$D^2 \frac{1}{\lg x} = 0 \iff \log x = -2 \qquad x = e^{-2}$ $\underline{\text{pto di flesso}}$

$D^2 \frac{1}{\lg x} < 0$ per $0 < x < e^{-2}$

$> 0 \qquad e^{-2} < x \neq 1 \, , \, \forall x > 0$