

Es 49, Cap. 2 [GE]

Exp / int (max/min) di

$$A = \left\{ x = \frac{t+1}{t-2} \mid t > 2 \right\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{immagine di } f}}{\text{im}(f)} \quad \text{dove } f(t) = \frac{t+1}{t-2} \quad \text{con dominio } \underset{\uparrow}{(2, +\infty)}$$

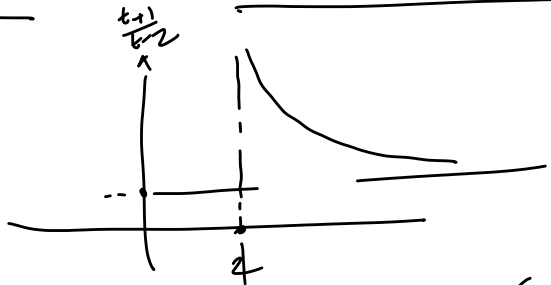
$$\frac{t+1}{t-2} > 1 \quad \frac{t+1}{t-2} > \frac{t-2}{t-2} \Leftrightarrow 3 > 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t+1}{t-2} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup A = +\infty$$

$$\forall n \geq 0 \quad \exists \delta > 0 \mid \left(\frac{b+1}{b-2} > M \right) \quad \forall \underline{2 < b < 2+\delta}$$

o.s. 19 A non ha max & min $\Leftrightarrow$ A non è limitato sup

$$\text{def. } \Leftrightarrow \text{ sup } A = +\infty$$



Dal grafico vediamo che

$\text{ran}(f) = (1, +\infty)$ $\Rightarrow \text{inf } A = 1, \text{sup } A = +\infty$

(esempio; 

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{t-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \inf_{x \in X} A \quad \text{in fact!}$$

$$1 < \frac{t+1}{t-2} \xrightarrow{\text{отсюда}} 1 \text{ — миноранта}$$

Dobbiamo far vedere che τ è il più
grande dei numeri anti

de ε_2 , $\frac{1+\varepsilon}{2}$ vor das super ein bisschen

only due $\exists t \in X \mid \frac{t+1}{t-2} < 1+\varepsilon$

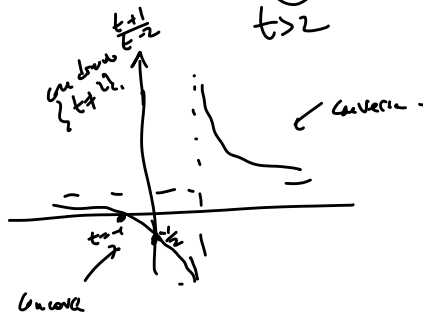
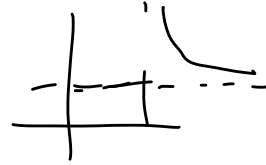
1. risultato segue dalle definizioni di derivata

Vediamo il grafico

$$\left(\frac{t+1}{t-2}\right)' = \frac{(t-2) - (t+1)}{(t-2)^2} = -\frac{3}{(t-2)^2} < 0, \text{ in } X$$

$$\left(\frac{t+1}{t-2}\right)'' = -3 \quad ((t-2)^{-2})' = (-3)(-2)(t-2)^{-3} = \frac{6}{(t-2)^3} > 0$$

$\Rightarrow$ f è strett. concava in $\textcircled{X}$
 $t > 2$

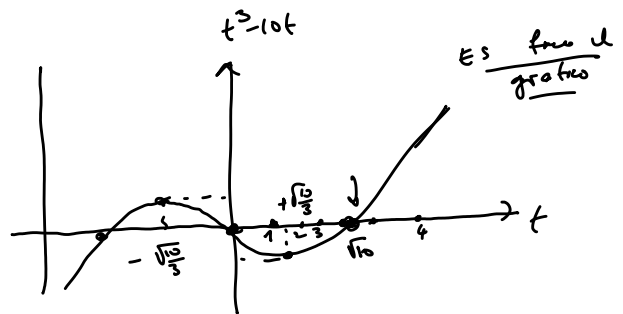


S1 Cap 2

$$A = \{x_n = n^3 - 10n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\min A = -12 = x_2$$

$$\text{per } x_n = +\infty \Rightarrow \text{ip } A = +\infty$$



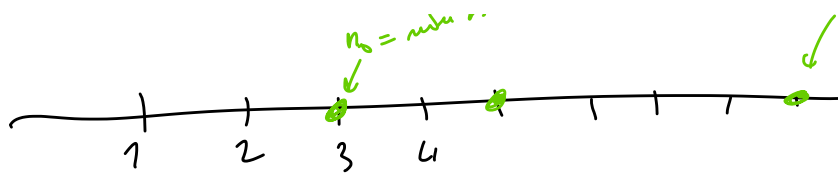
$$t^3 - 10t = t(t^2 - 10) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} t=0 \\ t=\pm\sqrt{10} \end{matrix}$$

$$(t^3 - 10t)', \quad 3t^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$(t^3 - 10t)'' = 6t \Rightarrow \begin{matrix} t=0 & \text{flessa} \\ t > 0 & \text{è strett. conv} \\ t < 0 & \text{è " concav.} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 = -9 \\ x_2 = -12 \\ x_3 = -3 \\ x_n > 0 \quad \forall n \geq 4 \end{matrix} \quad \leftarrow \quad \underline{\min}$$

Teorema* (principio del minimo) $A \neq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
 $\Rightarrow \exists \min A \Leftrightarrow \exists m_0 \in A \mid m_0 \leq n \quad \forall n \in A.$



Es 56 $A = \mathbb{N} \cup \left\{ x_n = -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup A = +\infty$ perché $\mathbb{N} \subseteq A$ e $\mathbb{N}$ non è limitato sup

Teorema (proprietà Archimedeo di $\mathbb{N}$) $\mathbb{N}$ non è limitato super.

$\min A = -1$ $x_1 = -1$ $x_n \uparrow$ max

Es 54 $A = \left\{ \frac{x}{n} \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$ $x^2 \in \mathbb{Q}$ $-100 \in A$ $\left(-\frac{1}{n}\right) \in A \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \subseteq A \Rightarrow \inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$

Funzione inversa

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva $\left(\begin{array}{l} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \\ x, y \in A \\ \text{oppure} \\ x \neq y \quad x, y \in A \\ \Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{array} \right)$

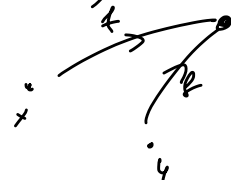
A definire la funzione INVERSA di f

$f^{-1}: y \in \text{range}(f) := \{y = f(x) \mid x \in A\} \mapsto x$ dove x è l'unico t.c. $f(x) = y$

$f^{-1}(y) = x(y)$

Esempio $\log x$ definita su $(0, +\infty)$ è l'inversa di e^x su $\mathbb{R}$

x^2 su $\mathbb{R}$ non è invertibile $(-1, 1 \xrightarrow{x^2} 1)$



x^2 è inv. su $[0, +\infty)$ perché in $(0, +\infty)$

$x \mapsto x^2$ è strett. crescente

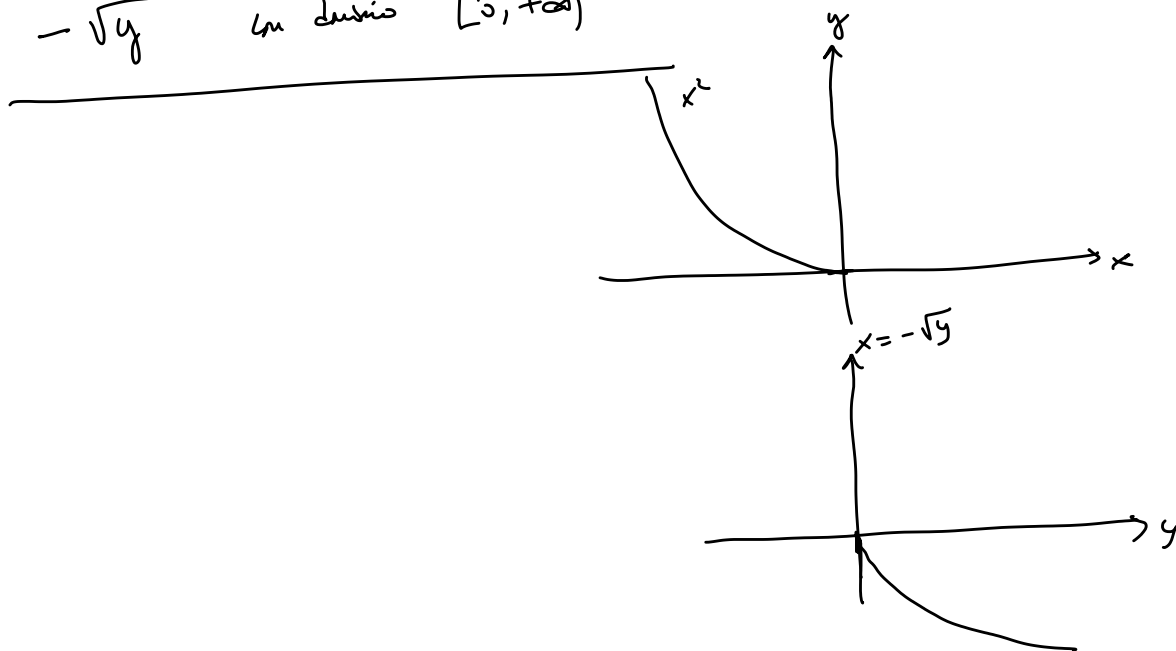
e l'inversa è $\sqrt{\cdot}$ su $[0, +\infty)$

$f: x^2$ è strett. decresc in $(-\infty, 0]$ quando è invertibile.

$$f = x^2 \Big|_{(-\infty, 0]} \quad (\text{la restrizione a } (-\infty, 0] \text{ di } x^2)$$

$$\text{im}(f) = [0, +\infty) \quad , \quad \text{inv}(f) = (-\infty, 0]$$

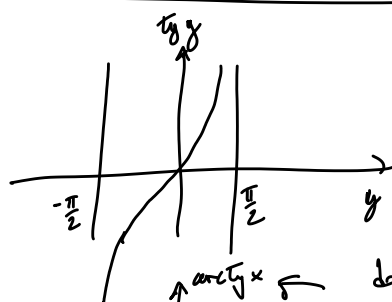
$-\sqrt{y}$ in dominio $[0, +\infty)$



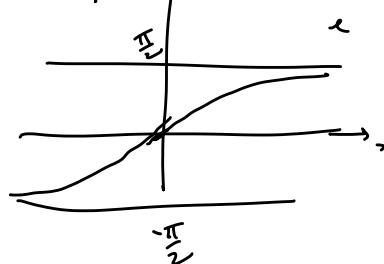
[GE] cap 5 es 77-86

77

$$y = \arctan x$$

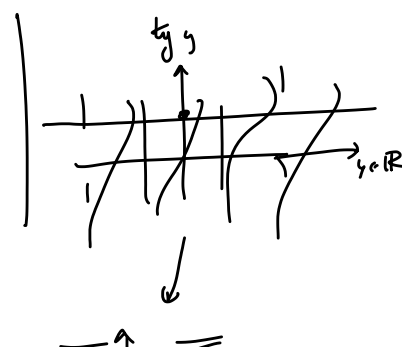


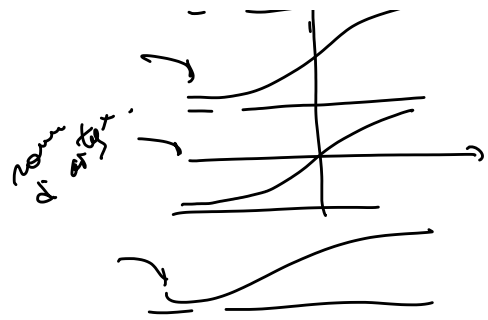
dominio $\in \mathbb{R}$
e $\text{im} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



VALORE PRINCIPALE
di $\arctan x$

Risposta $\arctan$ in dominio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$





91 $f(x) = x - |x| \quad x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{non è invertibile} \\ f(0) = f(1) \end{array} \right]$$

83 $y = \frac{1}{x}$ in $A = \{x \neq 0\}$ si $x = \frac{1}{y}$ è strettamente definita.



78* $f(x) = \underline{\underline{[x] - \{x\}}}$

$$\boxed{x = \underline{\underline{[x]}} + \underline{\underline{\{x\}}}$$

$$\underline{\underline{[-2, 3]}} = -3$$

$$\nearrow \underline{\underline{[2, 3]}} = 2$$

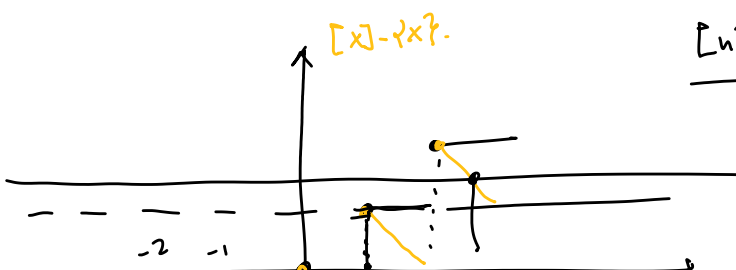
particolarmente (attenzione ai simboli!)

$$[x] := \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$



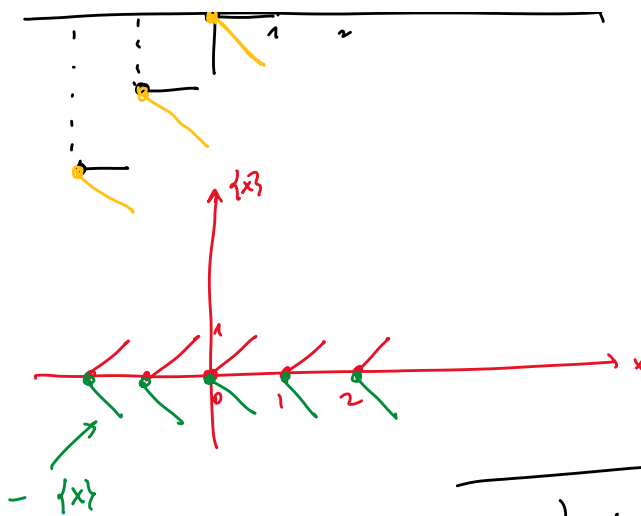
$$\{x\} := x - [x]$$

$$f(x) = [x] - \{x\}$$



$$\underline{\underline{[n] = n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}}}$$

$$f(x) = [x] - \{x\} \text{ è invertibile}$$



$\Rightarrow i$ invertibile
 f^{-1} è monotona?

$f(x)$ non è monotona
 e quindi anche $f^{-1}(y)$ non
 è monotona

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} x < y & f(x) < f(y) \\ \hline 0 < 1 & f(0) = 0 < f(1) = 1 \\ \hline \bar{x} < \bar{y} & f(\bar{x}) > f(\bar{y}) \\ \hline \bar{x} = 0 < \frac{1}{2} = \bar{y} & f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Solve l'esercizio anche analiticamente.

Supp. rivere f in
 $\rightarrow \underline{(n, n+1)} \quad n \in \mathbb{Z}$
 $f(n) = n$

ES. 177 Top 5 dimostrare che f è cont. o non avere "nessa" continua

$$f(x) = \frac{1}{1 - \log|\cos x|}$$

con dominio massimo. cioè

$$A = \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$0 \leq |\cos x| \leq 1$$



e controlliamo il denominatore

$$\log y = 1 \Leftrightarrow y = e$$

$$\text{ma } |\cos x| \leq 1 < e$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^{\pm}} \frac{1}{1 - \log|\cos x|} = \lim_{y \rightarrow 0^{+}} \frac{1}{1 - \log y} = 0$$

$y = |\cos x|$

$$\text{Se} \text{ definiamo } f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

otteniamo una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Ex. f is derivable on $\mathbb{R}$!
