Lezione 2

mercoledì 22 settembre 2021 08:06

Es (8) (Preliminari T.V.)

$A = \{ x \mid \sqrt{x^2-1} > x+3 \}$

RADICI ENNESIME

$a \geq 0, n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ b t.c.

$b^n = a$

tale b è denotato con

$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$

radice n-esima di a.

$\sqrt[n]{a}$ $n \geq 2$ a

IN GENERALE

"DEF" (n=2) (Teorema) $\forall a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $b \geq 0$ | $b^2 = a$

ESISTE UNICO

e tale numero reale b si denota $\sqrt{a}$ ($\sqrt{a} := b$)

$\sqrt{2}$ è l'unico numero strettamente positivo t.c. $(\sqrt{2})^2 = 2$

Innanzitutto dobbiamo avere

$x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff \sqrt{x^2} \geq 1$

Proposizione 1

Siano $a, b \geq 0$. Allora

$a \geq b \iff a^2 \geq b^2$

$a > b \iff a^2 > b^2$

$a > b \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}$

IMPLICA

$\Rightarrow$ Implicazione logica:

$P \Rightarrow Q \overset{def}{\iff}$ se P è vera, allora è vera Q

(se P, allora Q) (P, Q proposizioni)

$P \iff Q \overset{def}{\iff}$ P è vera se e solo se Q è vera

se e solo se

Nota: in generale non è vero che se $a, b \in \mathbb{R}$

$a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ infatti se $a = 2$, $b = -3$

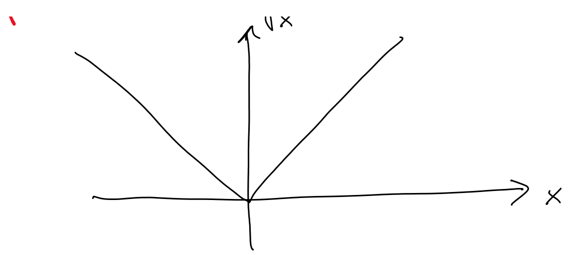
$2 > -3$ ma $2^2 = 4 < (-3)^2 = 9$

DEF DI MODULO O VALORE ASSOLUTO DI X

$$|x| := \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$(-x > 0)$

$\sqrt{x}$



$$\underline{\{x \mid |x| \geq 1\}} \supseteq A \qquad |x| \geq 1$$

$$(*) \quad \sqrt{x^2-1} > x+3$$

Due casi (i) $x+3 < 0$, (ii) $x+3 \geq 0$

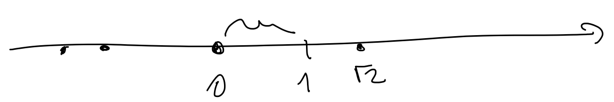
Caso (i) $x+3 < 0$ ossia $x < -3$, $(*)$ è verificata (se $|x| \geq 1$)

$x < -3$, ok $\qquad (-\infty, -3) \subseteq A$

Caso (ii) $x+3 \geq 0$ Per la Proposizione 1

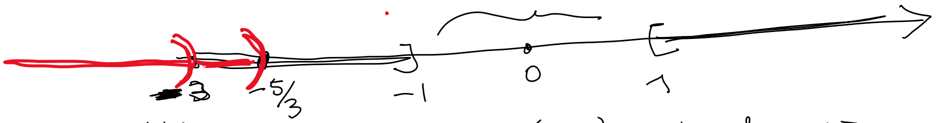
$$\cancel{x^2} - 1 > (x+3)^2 = \cancel{x^2} + 6x + 9$$

$$6x + 10 < 0 \qquad \left(x > y \text{ e } a > 0 \Longrightarrow ax > ay \right)$$



$$3x + 5 < 0 \qquad x < -\frac{5}{3}$$

escluso



$|x| \geq 1 \iff x \leq -1$, oppure $x \geq 1$

$$A = \left(-\infty, -\tfrac{5}{3}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{3} \right\}$$

Es 11 (Prof. T.V.)

$$A = \left\{ y = |x-1| + 2|x| \;\middle|\; x \in [-4, 2] \right\}$$

$$f : x \in \underbrace{[-4, 2]}_{\text{Dominio di } f} \longmapsto f(x) = |x-1| + 2|x|$$

DOMINIO DI f

$$A = f([-4,2]) := \text{l'immagine di } f = \mathrm{im}(f)$$

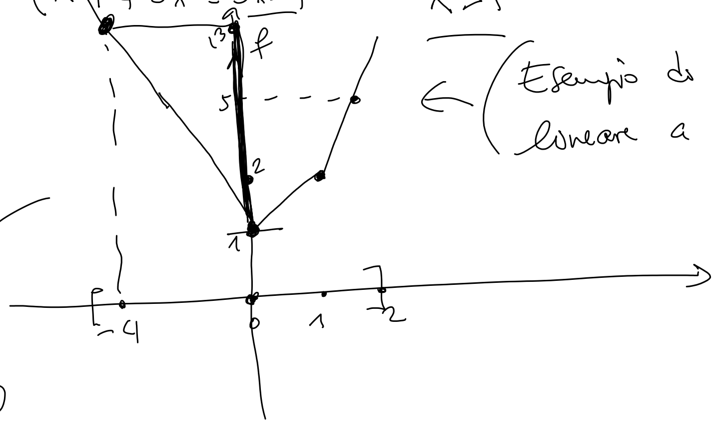
DEF. In generale $f : E \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

E: DOMINIO DI f; $\mathbb{R}$: CODOMINIO

$$\mathrm{im}(f) = \{ y \mid \exists\, x \in E \text{ con } y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in E \}$$

$$f(x) = |x-1| + 2|x| \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) - 2x = 1-3x, & x \leq 0 \\ 1 - x + 2x = 1+x, & 0 < x \leq 1 \\ x-1+2x = 3x-1 & x > 1 \end{cases}$$



(Esempio di funzione continua lineare a tratti)

$$A = f([-4,2]) = [1, 13]$$

ES. (15) (Prel. T.V.)

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3^x > \frac{1}{27} \}$$

Funzioni esponenziali Sia $\boxed{a > 0 \ , \ a \neq 1}$ BASE DELL'ESPONENZIALE

$x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$

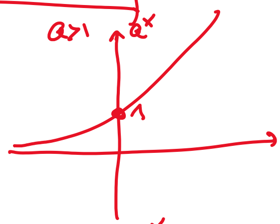
Proprietà

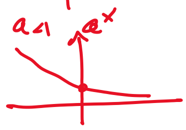
(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{x+y} = a^x a^y$ $(*)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(iii)\quad (a^x)^y = a^{xy} \qquad (iv)\ a>1,\ x>0\ \ a^x>1}$$

$a>1$ $x \to a^x$ è strett. crescente





(i), (ii) $\Rightarrow$ $a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$

$$a^x \cdot (a^{-x}) \overset{(ii)}{=} a^{x+(-x)} = a^0 \overset{(i)}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad (a^{-x}) = \frac{1}{a^x}$$

$$\left(a^x \overset{DEF}{:=} \lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbb{Q}}} a^r \right)$$

$$\boxed{a^r := (a^{\frac{1}{q}})^p}$$

$r := \frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$

def. di $r \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{p}{q} := p \cdot q^{-1}$

$3^x > \frac{1}{27}$, $\quad 27 \cdot 3^x > 1$

$$\left(3^x > \frac{1}{26} \qquad 26 \cdot 3^x > 1 \qquad 3^{\log_3 26} \cdot 3^x \right)$$

$$3^3 \cdot 3^x > 1$$

$$3^{3+x} > 1$$

$$\Updownarrow$$

$3+x > 0$ $\quad \boxed{\text{ovvero } x > -3}$

$$A = \{x \mid x > -3\} = (-3, +\infty)$$

LOGARITMI

$a>0$, $a \neq 1$ $\quad$ a base del logaritmo

$\log_a y$ è la funzione inversa di $\boxed{y = a^x}$

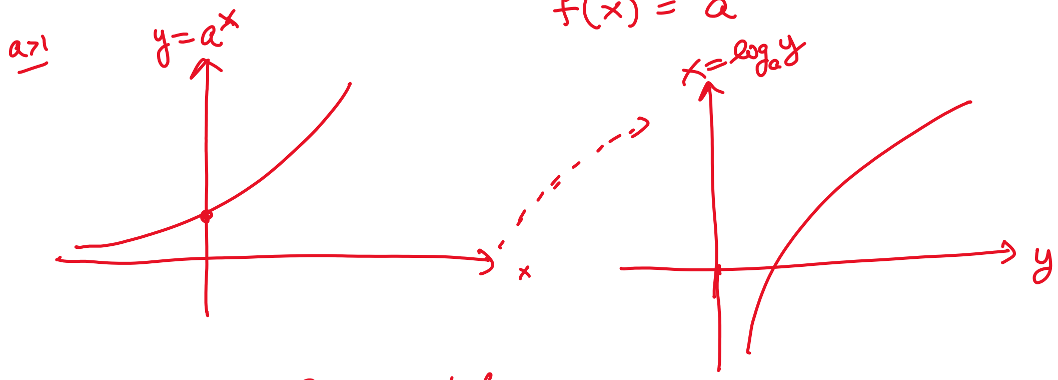
Teor. Dato $y>0$ $\exists!\, x>0 \mid a^x = y$

tale $x := \boxed{\log_a y}$ $\qquad$ la funzione inversa.

$$\boxed{a^{\log_a y} = y}$$

$$f \circ f^{-1} = id$$

$$f(x) = a^x$$



Proprietà fondamentali:

(i) $\log_a 1 = 0$ $\quad (a^0 = 1)$

(ii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ $\quad x,y>0$

(iii) $\log_a x^y = y \log_a x$ $\quad x,y>0$

(iv) $a>1$ $\quad \log_a x$ è strett. crescente

(v) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ $\quad (\forall a,b>0 \quad a,b\neq 1 \quad \forall x>0)$

La (ii) segue dalle proprietà (ii) degli esponenziali:

$$xy = a^{\log_a xy}, \qquad a^{(\log_a x + \log_a y)} \overset{(ii)\,esp}{=} a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \overset{def}{=} x \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad a^{\boxed{\log_a xy}} = a^{\boxed{\log_a x + \log_a y}}$$

$$\Rightarrow \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a^{\log_a x} \\ & a^{\log_a b \cdot \log_b x} \\ &= \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} \\ &= b^{\log_b x} = x \end{aligned}}$$