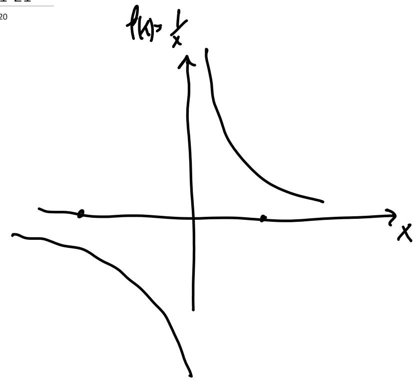


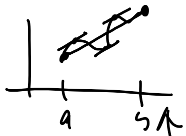
f è decrescente su $(0,+\infty)$ e su $(-\infty,0)$

Ma NON È DECRESCENTE su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Quindi f non è monotona in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x \neq 0$$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Ricordiamo il teorema di Lagrange

$$f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

$x<y$ con $x<\xi<y$

INTERVALLO

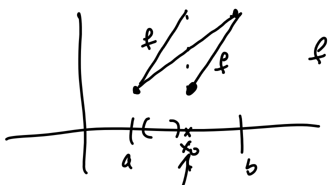
ipotesi complete: f definita su $[x,y]$ continua in $[x,y]$ e derivabile su (x,y)

$\Rightarrow \exists \quad \xi \in (x,y)$

Corollario se $f'(\xi)>0 \quad \forall \quad \xi \in (x,y) \Rightarrow f(y)>f(x)$

N.B. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ non è un intervallo.

Il fatto che f è continua su $[a,b]$ è necessario.



$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\forall \xi \in [a,b]\setminus\{x_0\}$

f definita su $[a,b]\setminus\{x_0\}$

$f(x) = (1+x)\, e^{\frac{1}{x}}$ asintoto obliquo

$f(x) \sim x$ per $x\to\pm\infty \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\frac{(1+x)\,e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}}$$

$\nearrow 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right) = 2$$

$e^{\frac{1}{x}} \to 1$ $\qquad$ 0^-

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1 \qquad\qquad \frac{e^{t}-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

SERIE NUMERICHE

Cos'è una serie? "È una somma infinita"

Data una successione di numeri (reali) $\{a_k\}$

ossia $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ ← termini della serie

Possiamo sommarli.

SOMME PARZIALI $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Studiare la serie con termini $\{a_k\}$ significa studiare la successione delle somme parziali $\{S_n\}$

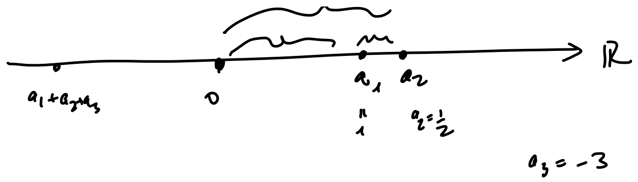
La domanda fondamentale è: converge la serie $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} S_n}$?

ossia $\exists$ il limite finito di S_n?

In generale una successione $\{S_n\}$ può:

1. non avere limite (la $\{S_n\}$ serie è indeterminata o irregolare)
2. può avere limite $l \in \mathbb{R}$ (la serie converge)
3. " " " $+\infty$ o $-\infty$ (la serie diverge)

Esempi $\quad a_k \qquad S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$



Es.1 $\quad a_k = (-1)^{k-1}$

$S_1 = 1, \quad s_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0$

$\underset{a_1}{1} + a_2 = 1 + (-1) = 0$

$$S_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$\{S_n\}$ è irregolare.

Es.2 $\quad \{S_n\}$ divergente a $+\infty$. $\qquad a_k = 1$

$S_n = n$

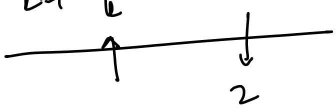
Es 3 $\quad a_k = \frac{1}{k^2} \qquad \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge $\left(a \ \frac{\pi^2}{6}\right)$

"difficile"

Infatti abbiamo dimostrato per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

esempio di serie a termini positivi



Def Una serie si dice a termini positivi se i suoi termini sono numeri positivi

cioè $\{S_n\} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad a_k > 0$

Oss. Se $\{S_n\}$ è una serie a termini positivi $\Rightarrow$ $\{S_n\}$ è strettamente crescente

Teorema Se $\{x_n\}$ è una successione monotona crescente $(x_n \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ o $\lim x_n = +\infty$ o $\lim x_n = \ell \in \mathbb{R}$

Dim. $\ell = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(Sappiamo che se $A \neq \emptyset$ e limitato $\Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$; se $A \neq \emptyset$ è illimitato sup., $\sup A := +\infty$ per definizione)

Due casi: o $\ell = +\infty$, o $\ell \in \mathbb{R}$

Caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \mid \ell - \varepsilon < x_{n_0} \leq \ell$

ma x_n è monotona crescente ossia $x_n \geq x_{n_0}, \ \forall n \geq n_0$.

Quindi $\forall n \geq n_0$

$$\ell - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \ell \overset{\text{banale}}{<} \ell + \varepsilon$$

$\ell \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\ell < \ell + \varepsilon$

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon \iff |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Es!! Dimostrare il caso $\ell = +\infty$.

Corollario: Serie a termini positivi o convergono (a un numero positivo) o divergono a $+\infty$.

Abbiamo anche dimostrato per induzione che

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ si chiama SERIE ARMONICA $(\zeta(1))$.

La serie armonica è divergente ossia $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$

$M > 0$ devo trovare N: $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > M$.

$\left(\Rightarrow \forall n \geq N, \ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > M\right)$

n: $1 + \frac{n}{2} > M \iff n > 2(M-1)$

$N = 2^{2M}$ quindi da $(*)$

$\sum^{2^{2M}} \dots \geq 1 + M - \dots M$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1} \frac{1}{k} > 1 + \dots$$

$M = 10^6$ $\qquad N = 2^{2\cdot 10^6} = (2^{10})^{2\cdot 10^5}$ $\qquad 2^{10} = 1024$

$$> (10^3)^{2\cdot 10^5} = 10^{6\cdot 10^5} = \left(10^{10^5}\right)^6$$

$$> 1.\underbrace{0 - - - 0}_{100\,000 = 10^5}$$

Teo. Se una serie $\{S_n\}$ converge $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ $a_k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\lim a_k = 0$

Dim Sappiamo: $S_n \to l \in \mathbb{R}$, $S_{n+1} \to l$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to l - l = 0 \quad (S_n := S_{n-1} + a_n).$$

CRITERIO NECESSARIO DI CAUCHY: se $\sum a_k$ è convergente

$\Rightarrow$ $a_k \to 0$

N.B. non è sufficiente !!!! (la serie armonica $a_k = \frac{1}{k} \to 0$ ma $\sum \frac{1}{k} = +\infty$)

Esempi! (SERIE GEOMETRICA)

Fisso $x \in \mathbb{R}$ (LA RAGIONE DELLA SERIE), $a_k = x^k$, $k \geq \mathbb{N}$

esempio $x = \frac{1}{2}$ $\quad a_k = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$x = 1$ $\quad a_k = 1, 1, 1, 1, \dots$

$$S_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

$$x S_n = x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

$(1-x) S_n = S_n - x S_n = x - x^{n+1}$ $\qquad$ se $x \neq 1$ $\qquad S_n = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$

$=$

se $x=1$ $\quad S_n = n$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} n & , \text{ se } x=1 \\ \dfrac{x-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x\neq 1 \end{cases}}$$

Ti faccio il calcolo di sopra.

$$S_n - x S_n =: \sum_{k=1}^{n} x^k - x\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{h=2}^{n+1} x^h = \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=2}^{n+1} x^k$$

$k+1=h$

$$= x + \cancel{\sum_{k=2}^{n} x^k} - \cancel{\sum_{k=2}^{n} x^k} - x^{n+1} = x - x^{n+1}$$

$$S_n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

se $|x|<1 \Rightarrow x^{n+1} \to 0$

se $|x| \geq 1 \Rightarrow S_n$ non converge.

$$\lim S_n = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}} \quad \text{se } |x|<1$$

se $x=1$ $\quad S_n \to \infty \quad (S_n = n)$.

se $x>1$ $\quad S_n \to +\infty \quad S_n = \dfrac{x^{n+1}-x}{x-1} \to +\infty$

se $x=(-1)$ $\quad S_n = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$, indeterminata

se $x<-1$ $\quad S_n$ è indeterminata e $|S_n|$ è illimitata

$$\boxed{\sum x^k \text{ converge} \iff |x|<1}$$

$x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$