

Serie telescopiche

$$\forall N \quad \left[\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= \sum_{n=1}^N (b_{n+1} - b_n) & a_n &= \underline{\underline{b_{n+1} - b_n}} \\ \sum_{n=1}^N b_{n+1} - b_n &= (\cancel{b_2} - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_4} - \cancel{b_3}) + \dots + (b_{N+1} - \cancel{b_N}) = b_{N+1} - b_1 \quad (*) \end{aligned} \right.$$

Se b_n ha limite $b_n \rightarrow \beta$ allora $\sum_{n=1}^N b_{n+1} - b_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \beta - b_1$

Teo- $\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta - b_1 \right]$ e $a_n = b_{n+1} - b_n$ e $\lim b_n = \beta$.

Proviamo il calcolo (*) in maniera rigorosa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (b_{n+1} - b_n) &= \sum_{n=1}^N b_{n+1} - \sum_{n=1}^N b_n = \sum_{k=2}^{N+1} b_k - \sum_{n=1}^N b_n = \sum_{n=2}^{N+1} b_n - \sum_{n=1}^N b_n \\ &= \underbrace{\sum_{n=2}^N b_n + b_{N+1}} - b_1 - \underbrace{\sum_{n=2}^N b_n} = b_{N+1} - b_1 \end{aligned}$$

Applicazioni

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ per confronto asintotico $\frac{1}{n^2} \rightarrow 1$

$$\frac{1}{n(n+1)} \approx \frac{1}{n^2}$$

questo è una serie telescopica

$$\frac{1}{n(n+1)} = b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \quad \text{con } a = b = 1$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)}$$

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{n}} \quad (b_n \rightarrow 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 + 1 = 1$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

[G*] Cap 4 ES 59-63 Calcolare:

ES 62 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (osservare la serie conv. per criterio confronto $\sum \frac{1}{n^2}$)

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{n=3}^N \frac{1}{n}} - \cancel{\sum_{n=3}^N \frac{1}{n}} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$$

$$\text{P} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

Oss. $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N (b_{n+1} - b_n) = b_{N+1} - b_1$
 $b_n = b(n) \quad \frac{b(n+1) - b(n)}{1}$ "derivata discreta"

OS Se $a_n = b_{n+1} - b_n \Rightarrow b_{N+1} - b_1 = \sum_{n=1}^N a_n \quad \forall N$
 Ma per trovare b_n t.c. valge (*)? $f_u!$

N=1 $b_2 - b_1 = a_1$ ora $b_2 = a_1 + b_1$

scegliamo $b_1 = c$ per una qualunque $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow b_2 = a_1 + c$

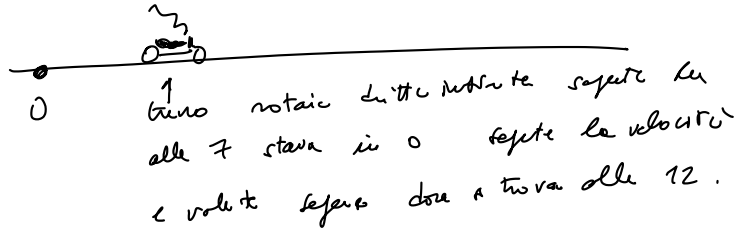
$$b_3 - b_1 = a_1 + a_2 = b_3 - c + a_1 + a_2$$

$$\boxed{b_n = c + \sum_{i=1}^{n-1} a_i}$$

" $\{b_n\}$ è la PRIMITIVA DISCRETA di $\{a_n\}$ "

Equi differenziali e integrali

Un punto materiale vincolato a muoversi su una retta con velocità assegnata $f(t)$



$x(t)$ = la posiz. del treno all'istante t

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(t) = f(t) \end{cases}$$

$$x'(t)$$

Es $f(t) = c$ (velocità costante uguale a c)

$$\begin{cases} \dot{x} = c \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) \text{ t.c. } \dot{x}(t) = c$$

$$\boxed{x(t) = ct + k}$$

$$0 = x(0) = k$$



$$x(t) = ct$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin t \\ x(0) = \pi \end{cases}$$

$$x(t) = -\cos t + k$$

$$x(0) = \pi = -\cos 0 + k = -1 + k, \quad \underline{k = \pi + 1}$$

la soluzione è $x(t) = -\cos t + \pi + 1$

$$1 \dot{v} = \sin t \cdot \omega^2 t$$

$$(\cos^3 t)' = 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t)$$

$$\hat{x}(0) = 0$$

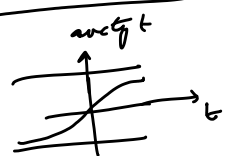
$$\begin{aligned} \text{Quindi: } \text{Ant } \cos^2 t &= -\frac{1}{3} (\cos^3 t)' \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cos^3 t \right)' \\ \left(-\frac{1}{3} \cos^3 t + k \right)' &= \text{Ant } \cos^2 t \end{aligned}$$

$$0 = x(0) = -\frac{1}{3} + k \quad k = \frac{1}{3}$$

$$\text{la funzione è } -\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{3} = \frac{1 - \cos^3 t}{3}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{1+t^2} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

$$(\arctg t)' = \frac{1}{1+t^2}$$



$$x(t) = \arctg t + k \quad x(0) = 2 = \arctg 0 + k, \quad k = 2$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$x(t) = \arcsin t + k$$

$$\begin{aligned} t \neq 0 & \quad \text{calcolare la derivata di} \\ \log |t| \end{aligned}$$

$$t > 0, \quad (\log t)' = \frac{1}{t}$$

$$t < 0, \quad \log(-t), \quad D \log(-t) = \frac{1}{-t} (-1) = \frac{1}{t}$$

$$D \log |t| = \frac{1}{t} \quad \text{in } \mathbb{R} - \{0\}$$

Es. $x = \log t$ trovare una funzione $x(t)$ t.c. $\dot{x} = \log t$
 Sugg.: usare la regola di Leibniz (derivata del prodotto).

$$(t \log t)' = \log t + t \cdot \frac{1}{t} = \underline{\underline{\log t + 1}}$$

$$(t \log t) - 1 = \log t$$

$$\begin{aligned} (t \log t - t)' &= \log t \\ (t (e^t - 1))' &= e^t \end{aligned}$$

$$x(t) = t (e^t - 1)$$

Oss. se f e g sono definite su un intervallo I
 e $f' = g'$ su $I \Rightarrow f - g = \text{costante}$
 Segue da teorema di Lagrange!

$$\text{Chiamo ora } F(x) = f(x) - g(x) \quad F' = 0$$

Vogliamo dimostrare: $F(x) = F(y) \quad \forall x, y \in I$

$x < y$ $[x, y]$ F è derivabile su $I \Rightarrow \bar{c}$ es. su I

$\Rightarrow \bar{c}$ continua su $[x, y]$, derivabile su (x, y)

$$\text{Per Lagrange } F(y) - F(x) = \underbrace{F'(\xi)}_{=0} (y - x) \quad \text{per uno } \xi \in (x, y)$$

$$\Rightarrow F(y) = F(x)$$

Consideriamo $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ e supponiamo che $\exists X(t)$ derivabile t.c.
 $\dot{X}(t) = f(t)$

allora $\exists!$ la soluzione di (*)

$$X(t) + k \quad X(t_0) + k = x_0 \quad \text{ovvero } k = x_0 - X(t_0)$$

$$x(t) = X(t) + (x_0 - X(t_0)) \quad \text{è soluzione di (*)}$$

e se $\boxed{y(t) \text{ fosse un'altra soluzione di (*)}$

$$y = f(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = y(t)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t y(s) ds$$

$$\Rightarrow x(t) = y(t)$$

$$\Rightarrow \underset{x_0}{x(t_0)} = \underset{x_0}{y(t_0)} + k \Rightarrow k=0.$$

$$\Rightarrow \underline{y(t) \equiv x(t)}.$$

DEFINIZIONE Data $f(x)$ definita su un intervallo I

una funzione F derivabile su I t.c. $F' = f$ è

(una) PRIMITIVA di f

Obs. due primitive F e G su un intervallo di f differiscono per una costante
 $(F' = G' \text{ su } I \Rightarrow F = G + \text{cost.})$

DEF Data f su I definiamo la primitiva generale

$$D^{-1}f = \{F \mid F' = f\} = \{F = F_0 + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

e F_0 è una primitiva di f .

Notazione classica

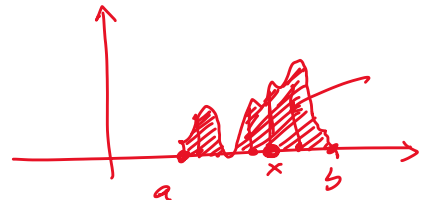
$$D^{-1}f =: \int f =: \int f(x) dx$$

Integrale indefinito di f

Definiamo l'integrale definito: $\int_a^b f(x) dx =$ area con segno tra il grafico di f e l'asse delle x
di f contenuta su $[a, b]$

$$\underline{f(x) \geq 0}$$

$$G_{f,1} \equiv [a, b] \times [0, \infty)$$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{area } \left\{ (x, y) \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

$$\text{se } f(x) = 1$$

$$\int_a^b 1 dx = (b-a)$$



$$\text{se } f(x) \leq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \text{area}$$



$$\int_1^3 (-1) dx = - (3-1) = -(2) = -2$$



Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

$$F(a) = 0.$$

Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

ossia F è una primitiva di f ($F(a) = 0$)

