(P1)

Notazione Definiamo se $a<b$ $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

Es $\int_1^0 \sin(x)\,dx = -\int_0^1 \sin x\,dx = -\left[(-\cos x)\right]_0^1 = \cos 1 - 1$

Ricordiamo il T.F.C. f cont su $[a,b]$, $\forall x_0 \in [a,b]$

definisco $F(x) = F(x;x_0) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ $\forall x \in [a,b]$

Allora F è una primitiva di f ossia $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$(F(x_0)=0)$

Osservazione $[F]_a^b := \underbrace{F(b) - F(a)}_{} = \int_{x_0}^{b} f(x)dx - \int_{x_0}^{a} f(x)dx$

l'incremento di F tra a e b

$\overset{(P1)}{=} \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx + \int_a^{x_0} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(additività)

Oss. Se G è una primitiva qualunque di f su $[a,b]$

$\Rightarrow G' = f = F' \Rightarrow (F-G)' = 0 \overset{\text{Lagr.}}{\Rightarrow} F - G = \text{cst.}$

e quindi $[G]_a^b = [F]_a^b$

Morale Se G è una primitiva qualunque di f cont. su $[a,b]$ $(a<b)$

$\Rightarrow \int_a^b f = [G]_a^b = G(b) - G(a).$

Oss. $\begin{cases} \dot{x} = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ f è cont su $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$

La soluzione è: $\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds}$

Infatti, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x} \overset{\text{TFC}}{=} f(t)$ ed è unica per Lagrange

perché $\int_{t_0}^{t_0} f(s)ds = 0$

CALCOLO DELLE PRIMITIVE

Regole

(R1) linearità

$$\int (f+g) = \int f + \int g \qquad \left(\Leftarrow \ \text{se } F' = f, \ G' = g \right.$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$F = \int f \qquad G = \int g$$

$$\Rightarrow (F+G)' = f+g \quad \text{ovvie}$$

$$\int (a f) = a \int f \qquad \left. \int (f+g) = \int f + \int g \right)$$

$$\text{se } F' = f \Rightarrow (aF)' = a f$$

[D] 1031 - 1041 trovare una primitive o tutte le primitive di $5ax^6$

1031.
$$\int 5a^2 x^6 dx = 5a^2 \int x^6 dx = \underbrace{5a^2 \frac{x^7}{7}}_{\text{una primitive}} (+c)$$

tutte le primitive al variare di $c \in \mathbb{R}$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\int x^{\alpha-1} = \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

$$\int x^p = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$\int \underbrace{5a^2 x^6}_{f(a)} da = 5x^6 \int a^2 da = 5x^6 \frac{a^3}{3}$$

1043
$$\int \frac{dx}{x^2+7}$$

Sappiamo che $\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$ ovvero

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+7} = \frac{1}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} \quad \checkmark$$

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) \right)' = \frac{1}{\frac{x^2}{7}+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}$$

derivata funzione composta

$$\left(\sqrt{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \right)' = \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1}$$

linearità della derivata

$$\Leftarrow \frac{1}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}$$

Controllo $\left(\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}$

$= \frac{1}{7} \frac{1}{1+\frac{x^2}{7}} = \frac{1}{7+x^2}$ ✓

1048 $\int \operatorname{tg}^2 x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ | N.B. $\frac{1}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)'$

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int 1 \overset{(21)}{=} \operatorname{tg} x - x$

1050. $\int 3^x e^x \, dx = \int (3e)^x$

$= \frac{(3e)^x}{\log(3e)} = \frac{3^x e^x}{1+\log 3}$

$a>0,\ a\neq 1$

$(a^x)' = (e^{x \log a})'$

$= a^x \log a$ ($\leftarrow a=1$ ok)

$$\boxed{\int a^x = \frac{a^x}{\log a}} \quad (a\neq 1)$$

1045 $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

$= \operatorname{sh}^{-1} \frac{x}{2}$

Come sopra

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

NOTAZIONI

$\operatorname{Arccosh} x := \cosh^{-1} x$

$\sinh x = \operatorname{sh} x$

$\sinh^{-1} x = \operatorname{sh}^{-1} x$

$\cosh x = \operatorname{ch} x$

Controllo: $\left(\operatorname{sh}^{-1} \frac{x}{2}\right)'$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4+x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$.

Per (Dente ...) $\log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$

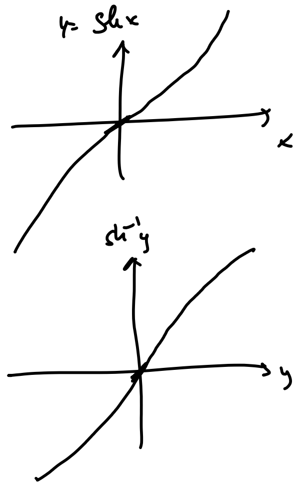
[illegible]

Ma allora se è giusto il calcolo di sopra ed ha [illegible] anche [D]?

si deve avere
$$\boxed{\log\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) = c + sh^{-1}\frac{x}{2}}$$

calcolando in 0 questa relazione otteniamo

$$\log 2 = c$$



$\frac{x}{2}=t$
$$\log\left(2t+\sqrt{4+4t^2}\right) = \log 2 + sh^{-1} t$$
$$= \log\left(2\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right) = \log 2 + sh^{-1} t$$
$$= \cancel{\log 2} + \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) = \cancel{\log 2} + sh^{-1} t$$

Quindi, abbiamo dimostrato che
$$\boxed{sh^{-1}x = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Seconda dimostrazione (senza primitive)

$$sh^{-1}x = y \iff x = sh\, y \overset{DEF}{=} \frac{e^y-e^{-y}}{2}$$
$$e^y - e^{-y} - 2x = 0 \iff e^{2y} - 1 - 2e^y x = 0$$
moltiplico e^y
$$\iff z^2 - 2zx - 1 = 0, \quad z = e^y > 0$$
$$\iff \begin{cases} z = x \pm \sqrt{x^2+1} \\ z > 0 \end{cases} \iff z = x + \sqrt{x^2+1}$$
$$\iff e^y = x + \sqrt{x^2+1} \iff y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

ALTRE REGOLE DI DERIVAZIONE

[illegible] dove $F' = f$

(R2) $\displaystyle\int \underset{\overset{\uparrow}{y(x)}}{(f\circ y)(x)}\; y'(x)\, dx = F\circ y$

$\displaystyle = \int f(y)\,dy \Big|_{y=y(x)} \qquad F = \int f$

dim $\quad (F\circ y)' = F'\circ y \;\; y' = (f\circ y)\;y' \quad ✓$

OSS

CAMBIO DI VARIABILE

$$\int f(y)\,dy \overset{(R1)}{\underset{\overset{\uparrow}{y=y(x)}}{=}} \int (f\circ y)(x)\; y'(x)\,dx$$

$$= \int f(y(x))\; y'(x)\; dx$$

N.B. $\displaystyle \int \underline{f(y)\,dy}\Big|_{y=y(x)} = \int f(y(x)) \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{y'(x)} dx$

(R3) Integrazione per parti $\qquad (fg)' = f'g + fg'$

$$\Leftarrow$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Rifacciamo l'integrale $\displaystyle \int \frac{1}{x^2+7}\,dx$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt7}\right)^2+1}\,dx \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{7}\int \frac{1}{y^2+1}\,\sqrt7\,dy$$

$y = \frac{x}{\sqrt7}$

$x = \sqrt7\, y$

$$= \frac{1}{\sqrt7}\int \frac{1}{y^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt7}\arctan y \Big|_{y=\frac{x}{\sqrt7}} \leftarrow$$

$$= \frac{1}{\sqrt7}\arctan\frac{x}{\sqrt7}\,.$$