Lezione 28 3-12-21
venerdì 3 dicembre 2021 08:15

Integrali definiti

Teorema Fondamentale del calcolo — Sia I un intervallo e $f \in C(I)$

(1) Se $F' = f$ su un intervallo I $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b := F(b)-F(a)$

↑ INCREMENTO DI F tra a e b

FORMULA DI NEWTON-LEIBNIZ

(2) $\forall x_0 \in I$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt =: F(x, x_0)$ = funzione integrale con pto base x_0

è una primitiva di f

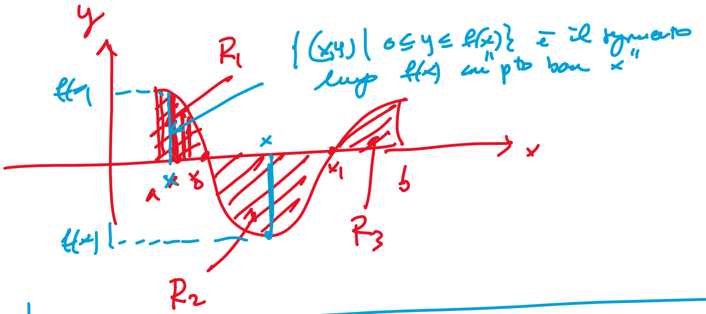
(vi ho fatto vedere che (2) $\Rightarrow$ (1), la dim di (2) la vedremo in AM1(20))

Abbiamo "definito" $\int_a^b f(x)$ di una funzione continua o continua a tratti

come "l'area con segno

della regione compresa tra

G_f e l'asse delle x"



$$\boxed{\int_a^b f(x) = \text{area}(R_1) - \text{area}(R_2) + \text{area}(R_3)}$$

$R_1 = \{(x,y) \mid a \le x \le x_0,\ 0 \le y \le f(x)\}$

$R_3 = \{(x,y) \mid x_1 \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

$R_2 = \{(x,y) \mid x_0 \le x \le x_1,\ f(x) \le y \le 0\}$

Strumenti per il calcolo degli integrali definiti

1 T.F.C.

2 "Cambio di variabile" o "per sostituzione" — E, I intervalli

$f \in C(E, I)$ (f continua da $E \to I$), $\varphi \in C^1(I)$

$\forall \alpha, \beta \in I$ $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi\ \varphi'\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$ $\quad a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$

$\overset{\alpha}{=}$ a

Dim. Sia $x_0 \in E$ $\quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, per T.F.C(1) $F' = f$

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi\ \varphi' \underset{\text{TFC. (2)}}{=} \int_\alpha^\beta F'\circ\varphi\ \varphi' = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(F\circ\varphi)\,dt \overset{\text{TFC(1)}}{=} F\circ\varphi(\beta) - F\circ\varphi(\alpha)$$

applicato a $(F\circ\varphi)(t)$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

TF.C (1) applicato a $F(x)$ $\quad$ TFC(1)

Integr. per parti $\quad \int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \quad (*)$

Dim. Per la linearità dell'integrazione $\left(\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g\right)$

$$(*) \iff \int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$$

$$\int_a^b (fg)'\,dx \underset{\text{TFC (1)}}{=} [(fg)]_a^b \quad \checkmark.$$

[D] 1576 Si può calcolare $\int_3^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\int_2^3 \sqrt[3]{1-x^2}$ con l'aiuto della sostituzione $x = \cos t$? NO

E l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$? SI.

$x = \varphi(t) = \cos t$ $\quad$ ci devono esistere punti α e β t.c. $\varphi(\alpha) = a$ (estremo sinistro), $\varphi(\beta) = b$ (estremo di destra)

Quindi nel primo caso non si può fare perché $\nexists$ α, β t.c. $\cos\alpha = 3$ e $\cos\beta = 2$

Nel secondo caso si $\alpha = \arccos\frac{1}{2}$ $\quad \beta = \arccos 1 = 2k\pi$ (qualunque k)

1523 $\quad \int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy = \int_1^4 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^{3/2}}\right) dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 + \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_1^4$

$\left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{y^2}$ $\quad \int y^{-3/2} = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2\frac{1}{\sqrt{y}}$

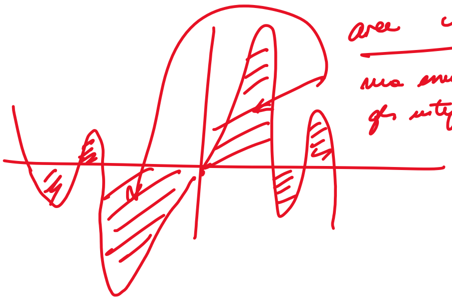
(NB. $[mF]_a^b = m[F]_a^b$) $\quad \boxed{\int y^\alpha = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)+2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$ ✓

1560 $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (tg\,x) = 0 \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (tg\,x)^{101}\,dx = 0$$

NB se f è dispari ossia $f(x) = -f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



se f è pari $f(x) = f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

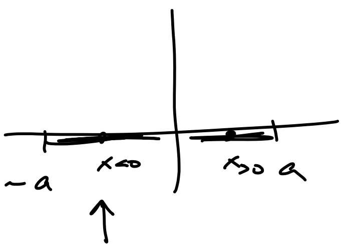
ES. 1595 Dimostrare queste formule

Supponiamo f dispari $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$

additività dell'integrale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall\, a,b,c \text{ in } I \text{ intervallo su cui } f \text{ è continua}}$$

$$= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$$

$t=-x$ nel primo integrale.

$\varphi(t) = -t \qquad \varphi'(t) = -1$

$$\int_{a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$ f è dispari $f(-t) = -f(t)$

$$= \begin{cases} -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx & f \text{ pari} \quad f(-t) = f(t) \end{cases}$$

e dispari tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$$

cfr.

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha$$

$$a_k = \frac{1}{k+j}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\alpha+j}$$

1544 $\displaystyle\int_{\lg 2}^{\lg 3} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$

$\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \right)$ $\quad \mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$

$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$= \int_{\lg 2}^{\lg 3} (\mathrm{th}\, x)'\,dx = [\mathrm{th}\, x]_{\lg 2}^{\lg 3} = \mathrm{th} \lg 3 - \mathrm{th} \lg 2$$

$$= \frac{e^{\lg 3} - e^{-\lg 3}}{e^{\lg 3} + e^{-\lg 3}} - \frac{e^{\lg 2} - \dots}{\dots}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} - \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{10} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \checkmark$$

$dx = 2t\,dt$

1582 $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \underset{\substack{x = t^2 \\ \sqrt{x} = t}}{=} \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt =$

$t \mid x(t) = 0$

$t = \sqrt{x}$

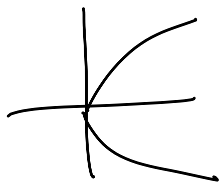
$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots\right)$$

$\boxed{x > 0 \qquad \sqrt{x} > 0}$

t

DIVERSO DA $y^2 = x$ le due curve due $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$.

$t^q \quad q = \text{m.c.m}(q_1, \dots, q_n) \qquad n = 1, \quad q_1 = 2$



$$= 2 \int_0^2 \frac{t}{1+t}\,dt = 2 \int_0^2 1 - \frac{1}{1+t}$$

$$= 2\left(2 - [\lg |1+t|]_0^2\right) = 2\,(2 - \lg 3)$$

1597 Mostrare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$t = \arccos x \qquad x = \cos t$

$\pi/$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin t\,dt}{t} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\,dt}{t} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \checkmark$$

Es. Si possono trovare $a < b$ t.c.

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{\arccos x} = \int_{a}^{b} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad ?$$

Soluzione alle 12:23

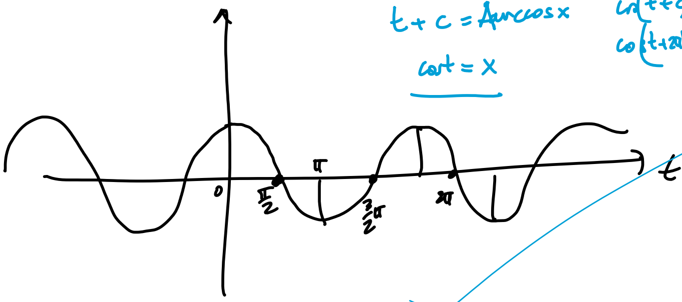
$x = \cos t$

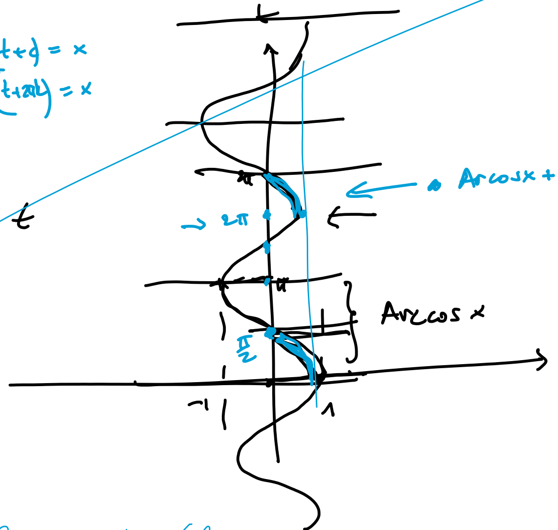
$t + c = \text{Arccos}\,x$

$\cos t = x$

$\cos(t+c) = x$

$\cos(t + 2k\pi) = x$





$\text{Arccos}\,x + 2\pi$

2π

$\text{Arccos}\,x$

NO

$$\int_{10}^{11} f(x)\,dx$$

$(10, 11) \subseteq \text{dom}(f)$

perché il dominio di un qualunque ramo dell'arcocoseno è $[-1, 1]$