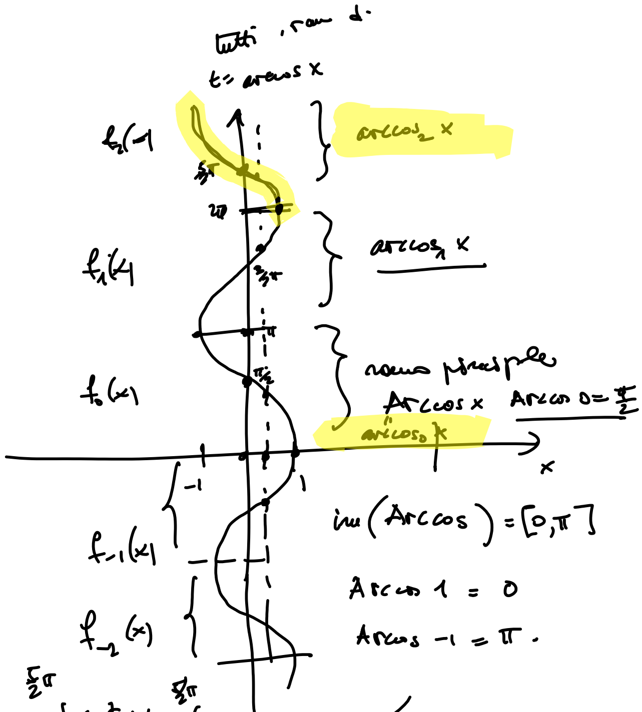
Lezione 29 3-12-21

venerdì 3 dicembre 2021 12:25

Determinare k t.c.

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos_k x}\,dx = \int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

con $k=2$



Prima abbiamo visto che

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos_0 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$$

$\mathrm{Im}(\mathrm{Arccos}) = [0,\pi]$

$\mathrm{Arccos}\, 1 = 0$

$\mathrm{Arccos}\, {-1} = \pi$.

Proviamo con $k=2$

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos_2 x}\,dx = -\int_{\frac{5}{2}\pi}^{2\pi} \frac{\sin t\,dt}{t} = \int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$t = \boxed{\arccos_2 x}$, $t \in [2\pi, \frac{5}{2}\pi]$

$\cos t = x$

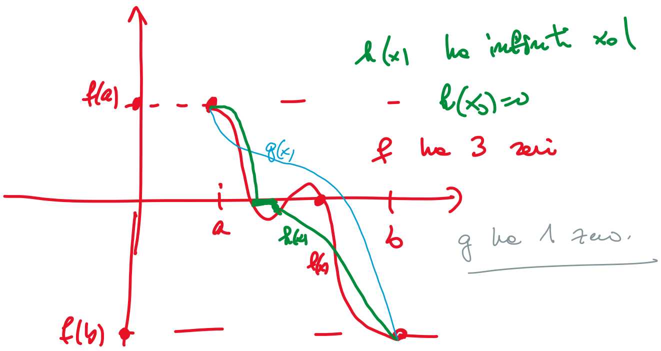
$dx = -\sin t\,dt$

Es* Sia $f(x) = x^5 - 10x^3 + 5x^2 - 8x + 10$ [Sugg. 1. studiare $f'''(x)$ 2. studiare f'

Studiare il grafico di $f(x)$. In particolare, dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=0$ $(x\in\mathbb{R})$.
e calcolarle approssimativamente.

Teorema ($\exists$ zeri) $f \in C([a,b])$, $f(a)f(b)<0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \mid f(x_0)=0$.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

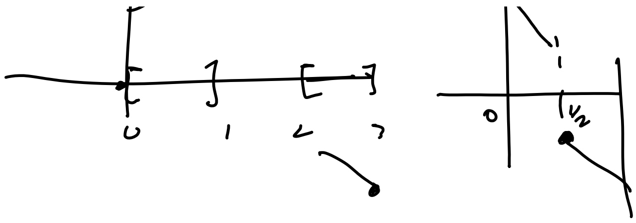
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \exists\, b>0$ t.c. $f(b)>0$.

$\exists\, a<0$ t.c. $f(a)<0$.

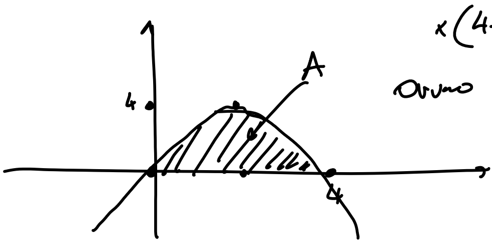
$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \mid f(x_0)=0$

Se f o non è cont. o se il dominio non è un intervallo, allora la tesi può non essere vera.



1623 Calcolare l'area limitata da $y = 4x - x^2$ e l'asse delle x

$x(4-x)$



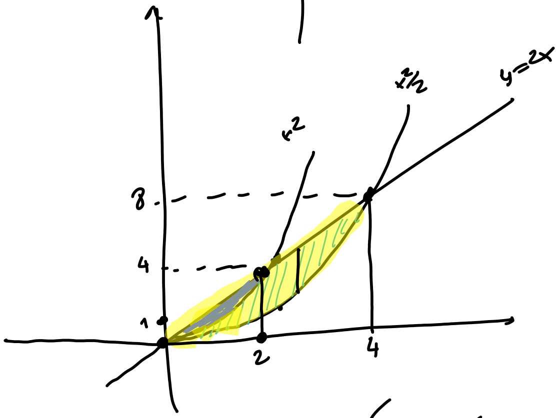
Avremo da $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4x - x^2\}$

Calcolare area(A)

$$\text{area}(A) = \int_0^4 4x - x^2 = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 4 \cdot 8 - \frac{64}{3} = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3}$$

1635 Calcolare l'area della regione A compresa tra le parabole $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e la retta $y = 2x$



$x^2 = 2x$, $x = 2$

$\frac{x^2}{2} = 2x$, $x = 4$

Metodo alternativo

$$\text{area } A = \int_0^2 x^2 - \frac{x^2}{2} + \int_2^4 2x - \frac{x^2}{2}$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_2^4 (4x - x^2)$$

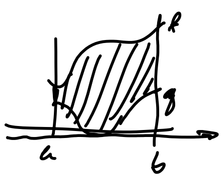
$= \ldots\ldots$

Area A = area (regione compresa tra $y = 2x$ e $y = \frac{x^2}{2}$)

− area (regione compresa tra $y = 2x$ e $y = x^2$)

Se $0 \le f \le g$ area "tra g e f" $= \int_a^b (g - f)$

$f, g\ [a,b] \to [0, +\infty)$



$$\text{area } A = \int_0 2x - \frac{x^2}{2} - \int_0 2x - x^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^4 4x - x^2}_{\frac{32}{3}} - \int_0^2 2x - x^2$$

$$= \frac{16}{3} - \left(2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \right)$$

$$= \frac{16}{3} - \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{16-4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

INTEGRALI IMPROPRI o INTEGRALI GENERALIZZATI

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \quad , \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

è cont. su $(0,1)$ e $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\int_a^b f(x)$ su $-\infty \le a < b \le +\infty$ e/o la funzione f non è limitata su (a,b)

(f cont su (a,b))

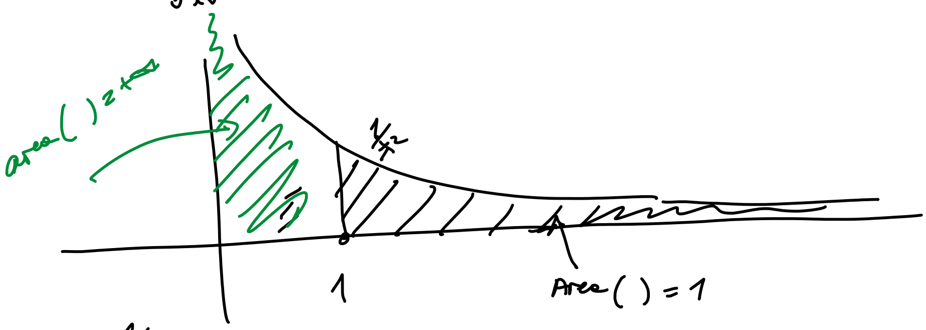
$$:= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \quad , \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

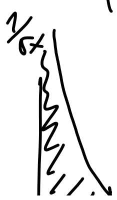
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ è cont. su $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$

Calcoliamo

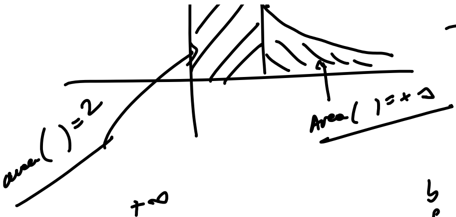
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$





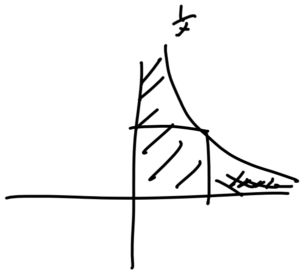
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2\lim_{\varepsilon \to 0}\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

ma $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = +\infty.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty$$



Infatti

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} = \left[\log x\right]_1^\infty = \lim_{b\to+\infty} \log b = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log x\right)_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \log \varepsilon^{-1} = +\infty$$

L'analisi degli integrali è simile allo studio delle serie

La prima domanda è: un integrale proprio è finito o no?

(poi, se possibile, calcolarlo)

CRITERI DI CONVERGENZA

(1) (confronto) $0 \le f \le g$ su (a,b) ⟹ se $0 \le \int_a^b g < \infty$ ⟹ $\int_a^b f < +\infty$

$-\infty \le a < b \le +\infty$

& $\int_a^b f = +\infty$ ⟹ $\int_a^b g = +\infty$

(2) (Confronto asintotico) $0 < f, g$ cont., su $[a,b)$ se $\lim_{x\to b^-} \frac{f}{g} = c > 0$.

$a < b \le +\infty$ allora $\int_a^b f$ è finito ⟺ $\int_a^b g$ è finito

Analogo su $(a,b]$

(3) Confronto per serie

Sia f una funzione decrescente in $[a,+\infty)$

allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f < \infty \iff$ converge $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ $\forall N \geq a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ conv} \iff \alpha > 1.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{\infty} = \lim_{b \to +\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) & \alpha \neq 1 \quad \alpha>1. \\ \left[\lg x \right]_1^{\infty} = +\infty & \alpha = 1 \end{cases}$$

(4) Crit. conv. assoluta $\quad$ Se $\displaystyle\int_a^b |f| < \infty \implies \int_a^b f$ è finito

e $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$