

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

sono equazioni che coinvolgono una funzione incognita $x(t)$ e la sua derivata

Esempi

(1) $x'(t) = f(t)$ per una data $f(t) \in C(\overset{\uparrow}{\text{intervallo}} I)$

(2) $x' + x = \sin t$, $x = x(t)$

(3) $x' = x^2$

Esempio (1): $x'(t) = \underline{f(t)} \Leftrightarrow x$ è una primitiva di f

Se $t_0 \in I$, integro l'E.D. tra t_0 e $t \in I$ e per il T.F.C.

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

Non $\int_{t_0}^t x'(t) dt$

$$x(t) - x(t_0)$$

Quindi le soluzioni $x(t)$ di (1) sono date da

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds \quad \text{con } x_0 = x(t_0)$$

N.B. le soluzioni di $x' = f(t)$ hanno infiniti e dipendono da un parametro reale x_0
o equivalentemente da $F' = f$ dove F è una primitiva di f

$$x(t) = c + \underline{F(t)}$$

In particolare se consideriamo il seguente PROBLEMA DI CAUCHY
(o di VALORI INIZIALI)

$$x' = f(t) \quad f \in C(I) \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I$$

$$(C1) \begin{cases} x' = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

amplitude

allora (C1) ha una ed una sola soluzione data da

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

Esempio

$$\begin{cases} x' = \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \int_0^t \sin s ds \\ &= 2 + 1 - \cos t \\ &= 3 - \cos t \end{aligned}$$

(2) $x' + x = \sin t$

ED lineare non omogenea

x e x' appaiono linearmente

molto più per e^t la (2)

$x' + x = 0 \Rightarrow x' = -x$

ad esempio $x = e^{-t}$

ED. lineare omogenea

$$e^t x' + e^t x = e^t \sin t$$

o

$$(e^t x)'$$

e posto $y = e^t x$ ottengo

$$y' = e^t \sin t$$

e fare riferimento al problema (1).

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^s \sin s ds$$

lo abbiamo visto esplicitamente.

$$e^t x(t) = e^{t_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^s \sin s ds$$

con $x_0 = x(t_0)$ da cui

$$x(t) = e^{t-t_0} x_0 + e^{-t} \int_{t_0}^t e^s \sin s ds$$

che è l'unica soluzione di $\begin{cases} x' + x = \sin t \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \leftarrow \text{ED non lineare (indici } x \text{ appare non-linearmente e non come } a \cdot x)$

(NB $\dot{x} = x' = Dx = \frac{d}{dt} x$)

$\uparrow$ Newton $\uparrow$ Lagrange $\uparrow$ not. moderne $\uparrow$ Leibniz

$x_0 = 0$ $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ha come unica soluzione $x(t) \equiv 0$.

$x_0 \neq 0$ $x(0) = x_0 \neq 0$ $\dot{x} = x^2$

$x(t)$ sarà una soluzione C^1 ($x(t)$ è cont. $\Rightarrow \dot{x} = x^2$ è continua dato $x \in C^1$, e derivando la relazione)

$\dot{x} = x^2 \Rightarrow x'' = 2x \cdot x' \Rightarrow x'' \in C$ ora
 $x \in C^2 \Rightarrow$ cont. anche $x \in C^\infty(I)$

Se $x(0) = x_0 \neq 0 \Rightarrow x(t)$ sarà diversa da zero in un intorno di $t_0 = 0$
 e l'ED per t vicini a 0 è equivalente a

$\frac{x}{x^2} = 1$ ora, come prima, integro tra 0 e t

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)^2} ds = \int_0^t ds = t$$

è un integrale facile in un altro $\int_0^t \frac{f(x)}{x^2} \dot{x} ds = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{f(x)}{x^2} dx$
 con $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $x(s)$ $\dot{x} ds = dx$
 Cambia le variabili!

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_0^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

In conclusione,

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t$$

o sia

$$\frac{1}{x_0} - t = \frac{1}{x(t)}$$

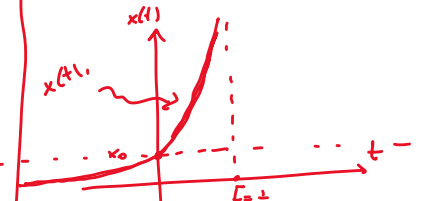
$$x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$$

Verifichiamo

$$x(0) = x_0$$

$$x' = x_0 \left(-\frac{1}{(1 - t x_0)^2} \right) = (-x_0)$$

Qual è il dominio di $x(t)$?
 ha un asintoto verticale
 in $\bar{t} = \frac{1}{x_0}$



$$= \left(\frac{x_0}{1-tx_0} \right)^2 = x(t)^2 \quad \checkmark \quad \left| \begin{array}{l} \text{il dominio di } x(t) \text{ è} \\ (-\infty, \frac{1}{x_0}) \end{array} \right.$$

E.D. lineari del primo ordine sono E.D. della forma

$$x' + \alpha(t)x = f(t) \quad \text{con } \alpha \text{ e } f \text{ funzioni di } t \text{ assegnate e continue}$$

$$\left(a(t)x'(t) + b(t)x = g(t) \right)$$

↑
L'equazione lineare di x' e x

con $a(t) \neq 0$ e quindi dividendo per $a(t)$ otteniamo l'equazione di prima)

o anche in

$$\text{Problema di Cauchy} \quad \begin{cases} x' + \alpha(t)x = f \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x' + \alpha(t)x = f$$

$$\text{con } A(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$t_0 \in I, \quad \alpha, f \in C(I)$$

e moltiplico per $e^{A(t)}$

$$\underbrace{e^A x' + \alpha e^A x}_{(e^A x)'} = e^A f$$

$$(e^A)' = e^A A' = e^A \alpha$$

e, come prima,

$$\int_{t_0}^t (e^A x)' = \int_{t_0}^t e^{A(s)} f(s) ds$$

"T.F.C"

$$\underbrace{e^{A(t)}}_{=} x(t) - \underbrace{x_0}_{x_0 := x(t_0)} = \int_{t_0}^t e^{A(s)} f(s) ds$$

da cui ottengo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s)} f(s) ds$$

$$x(t) = x_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} f(s) ds$$

↑
è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + \alpha x = f \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ED del primo ordine a variabile separabili

$$\begin{cases} x' = f(x) g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se $f(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$

se $f(x_0) \neq 0$ dividendo per $f(x)$

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{x'}{f(x)} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)}$$

N.B. l'ED del primo ordine più generale è della forma

$$F(x', x, t) = 0$$

e se possiamo esprimere la x'

$$x'(t) = f(x, t)$$

Esercizi del 2° di Tor Vergata

ES (3)

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + \frac{1-y}{t} = \frac{1-y}{t} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

↑
la soluzione è $y(t) \equiv 1$

N.B. è una equazione lineare o un'equazione a variabile sep

$$y' + \frac{1}{t} y = \frac{1}{t}$$

↑ ↑
 $\alpha(t)$ $f(t)$

oppure $y' = \frac{1-y}{t} = f(y) g(t)$
con $f(y) = 1-y$
e $g(t) = \frac{1}{t}$

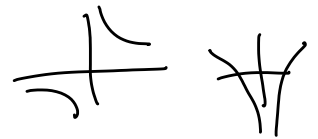
Per separare le variabili

$$\begin{cases} \frac{y'}{1-y} = \frac{1}{t} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_1^t \frac{y'}{1-y} ds = \int_1^t \frac{1}{s} = [\log |s|]_1^t = \log |t|$$

$$\int_2^{y(t)} \frac{dy}{1-y} = [-\log |1-y|]_2^{y(t)} = -\log |y(t)-1|$$

$$\int \frac{1}{x} = \underline{\underline{\log |x|}}$$



$$\log |y(t)-1| = \log |t|$$

$$|y(t)-1|^{-1} = |t|$$

$$\frac{1}{|y(t)-1|} = \frac{|t|}{1}$$

per $t > 0$ prendo solo t non a 1
 $y(t)-1 > 0$.

$$\frac{1}{y(t)-1} = t \quad \text{per } |t-1| < \varepsilon \quad \text{per un certo } \varepsilon$$

$$y(t)-1 = \frac{1}{t}, \quad \boxed{y(t) = 1 + \frac{1}{t}}$$

$$y(t)-1 > 0, \quad \text{se } t > 0$$

La soluzione è data da $y(t) = 1 + \frac{1}{t}$ per $t \in (0, +\infty)$
Es trovare la soluzione usando la tecnica applicata dell'equazione lineare

Es (10)

$$\begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

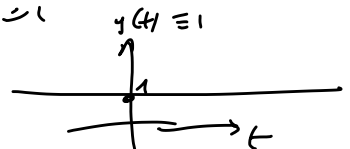
a variabili separabili.

Qual è l'equilibrio (cioè la soluzione costante $y(t) \equiv y_0$) di

$$y' = 2t\sqrt{1-y^2}, \quad y_0 \equiv 1$$

$$y(t) \equiv 1, \quad y(0) = 1$$

$$\forall t, \quad 2t \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_0 = 0$$



(soluzioni stazionarie o costanti)

Più in generale gli equilibri (punti fissi)

da $x' = f(x)g(t)$ trova gli zeri di f , cioè trova le x_0 | $f(x_0) = 0$.

Se $g(t_0) = 0$. $x = c$ $x' = 0 = f(c)g(t) \neq 0$ e $g(t) \neq 0$
(a meno che $f(0) = 0$).

$$\begin{cases} \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e integrando

$$\int_0^t \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} ds = 2 \int_0^t s ds = t^2$$

$$\begin{aligned} \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \left[\arcsin y \right]_0^{y(t)} \\ &= \arcsin y(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sin t^2$$

Verifica

$$y(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$y' = (\cos t^2) \cdot 2t = \sqrt{1 - (\sin t^2)^2} \cdot 2t$$

$$\uparrow$$

$$\cos s > 0 \text{ per } s \text{ piccolo}$$

$$= 2t \sqrt{1 - y^2} \quad \checkmark$$

$$\cos s = \sqrt{1 - \sin^2 s}$$

$$\text{con } s = t^2$$

$$\sin^2 t^2$$