

Eqn. diff. ordinarie del 2° ordine a coeff. costanti

(1) $\boxed{a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0}$ a, b, c costanti, $x = x(t)$

In generale per eqn. del 2° ordine il problema di Cauchy (o ai dati iniziali) è:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (\text{forma generale})$$

Caso dell'eqn. di Newton

$m \ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 accelerazione forza da gravità sul corpo materiale $x(t)$

$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0 \Rightarrow$ determina (in generale) un'unica soluzione.

$f=0 \quad m \ddot{x} = 0$

$\uparrow$
 $x = \frac{c}{m} + \frac{v_0}{m} t$ c, v_0 costanti
 $\uparrow$
 $\dot{x} = v_0, \ddot{x} = 0$

Soluzione generale

& $\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$

$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t}$

(2) È un'equazione omogenea ossia non c'è il termine $f(t)$.

ed è lineare in $\underline{x}$ e $\underline{\dot{x}}$ ossia

se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni $\hookrightarrow$ (1) $\Rightarrow A x_1(t) + B x_2(t)$

è flessione

$$\begin{aligned} & a (A x_1 + B x_2)'' + b (A x_1 + B x_2)' + c (A x_1 + B x_2) \\ &= A (a \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + c x_1) + B (a \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + c x_2) = 0. \end{aligned}$$

Alcuni casi particolari

$\ddot{x} + x = 0$

$\ddot{x} = -x$

$x = \cos t, \sin t$

$\uparrow$
 la soluzione generale sarà $A \cos t + B \sin t$

$\ddot{x} + x = 0$

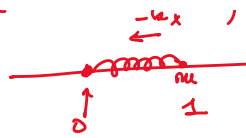
(oscillazioni armoniche di ampiezza 1
 e periodo 2π - Legge di Hooke, 1)

$y''(x) + y'(x) = \mu x$
 $\uparrow$
 variabile indep x
 la x
 $y'(x) = \frac{d}{dx} y(x)$

$$(2) \begin{cases} \ddot{x} + kx = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

e costante elastica

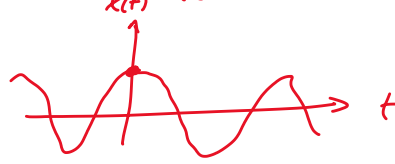
$$m \ddot{x} = -kx$$



$$x(t) = A \cos t + B \sin t$$

$$x(0) = A = 1 \quad \dot{x}(0) = (-A \sin t + B \cos t) \Big|_{t=0} = B = 0$$

$$x(t) = \cos t \quad \text{è l'oscillazione di (2)}$$



$$m \ddot{x} + kx = 0, \quad m, k > 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\tilde{\omega}^2 x, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} = -\tilde{\omega}^2 x \quad \text{le soluzioni sono } \sin \tilde{\omega} t \quad \cos \tilde{\omega} t$$

la stessa forma è $x(t) = A \sin \tilde{\omega} t + B \cos \tilde{\omega} t$
 ↑
 frequenza delle oscillazioni

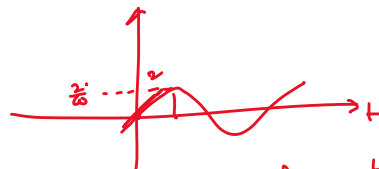
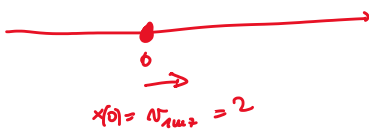
$$(3) \begin{cases} \ddot{x} + \tilde{\omega}^2 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$$

$$x(0) = B = 0$$

$$\dot{x}(0) = (A \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t - B \tilde{\omega} \sin \tilde{\omega} t) \Big|_{t=0} = A \tilde{\omega} = 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{\tilde{\omega}}$$

Quindi la soluzione di (3) è $x(t) = \frac{2}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t$



il periodo di $x(t) = A \sin \tilde{\omega} t + B \cos \tilde{\omega} t$

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} \quad \text{frequenza}$$

$$x(t+T) = x(t)$$

$$\sin(\tilde{\omega}(t+T)) = \sin \tilde{\omega} t$$

$$\sin(\tilde{\omega} t + \tilde{\omega} T) = \sin \tilde{\omega} t$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\omega} T = 2\pi k$$

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} k$$

perché abbiamo (ps.) è $T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$

Concludere la discussione di (1) nel caso $b=0$ e $a \cdot c > 0$

Possiamo a

$$\ddot{x} - x = 0$$

$$(a = -b)$$

$$\ddot{x} = x$$

$$x = e^t \text{ o } e^{-t} \text{ sono soluzioni}$$

la soluzione generale è $A e^t + B e^{-t} = x(t)$

oss

$$\dot{x} = f(x)$$

per $\dot{x} = y$

$$\dot{y} = f(y)$$

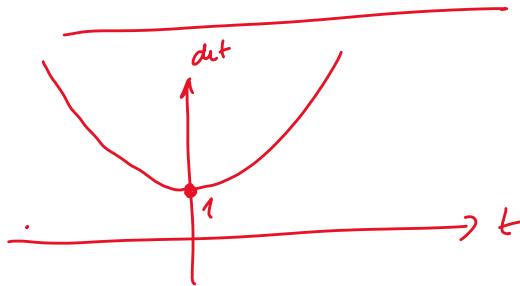
per la regola di separazione delle variabili

$$\dot{x} = y \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t y(t) dt$$

ES $\begin{cases} \ddot{x} - x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ $\checkmark$

$x(0) = A+B = 1$ $\Rightarrow 2A = 1, A = \frac{1}{2}$
 $x'(0) = A-B = 0 \Rightarrow 2B = 1, B = \frac{1}{2}$

$$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t.$$



$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0, \lambda > 0$$

sol. gen. $A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t}$ o anche $A \cosh \lambda t + B \sinh \lambda t$

Dobbiamo analizzare il caso $b \neq 0, a \neq 0, c \neq 0$

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0 \quad \ddot{x} + 2 \frac{b}{2a} \dot{x} + \frac{c}{a} x = 0$$

(4) $\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \gamma x = 0$ con $\beta = \frac{b}{2a} \neq 0$ e $\gamma = \frac{c}{a} \neq 0$

Suipponiamo, cambiando variabile indip

$$x(t) = e^{-\beta t} y(t)$$

$$\dot{x} = -\beta e^{-\beta t} y + e^{-\beta t} \dot{y} = e^{-\beta t} (\dot{y} - \beta y)$$

$$\ddot{x} = \beta^2 e^{-\beta t} y - \beta e^{-\beta t} \dot{y} - \beta e^{-\beta t} \dot{y} + e^{-\beta t} \ddot{y} = e^{-\beta t} (\ddot{y} - 2\beta \dot{y} + \beta^2 y)$$

Inserendo nella (4)

$$e^{-\beta t} (\ddot{y} - 2\beta \dot{y} + \beta^2 y) + 2\beta e^{-\beta t} (\dot{y} - \beta y) + \gamma e^{-\beta t} y = 0$$

$$\ddot{y} - (\beta^2 - \gamma) y = 0$$

$$\beta^2 - \gamma = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{\Delta}{4a^2}$$

Quindi non c'è il termine in $\dot{y}$

Concludiamo che abbiamo risolto il problema.

Infatti abbiamo tre casi a seconda che $\Delta = 0, \Delta > 0, \Delta < 0$

(a) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = \gamma \Leftrightarrow b^2 = 4ac$

$$u = At + B$$

$$x(t) = e^{\beta t} y$$

$$\beta = \frac{b}{2a}, \gamma = \frac{c}{a}$$

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2a} t} \cdot t + B e^{-\frac{b}{2a} t}$$

$$\Delta = 0$$

Con $\Delta = b^2 - 4ac$
 discriminante dell'equ.
 di 2° grado

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = 0.$$

o anche dell'equ.

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

$$y - \frac{\Delta}{4a^2} y = 0 \quad \Delta > 0$$

(3) $\Delta > 0$ $y = A e^{\sqrt{\Delta} t} + B e^{-\sqrt{\Delta} t}$

(4) $\Delta < 0$ $\ddot{y} + (b^2 - 4a^2) y = 0$
 $\ddot{y} + \frac{-\Delta}{4a^2} y = 0, (\Delta < 0)$

$$\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

EQUAZIONE
CARATTERISTICA
DELL'EQ. DIFF

Quindi $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2a}t + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t} + B e^{-\frac{b}{2a}t - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t}$$

$$= A e^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}t} + B e^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}t}$$

$$= \left[A e^{d_+ t} + B e^{d_- t} \right] \quad \Delta > 0$$

dove $d_{\pm}$ sono le radici reali di

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

N.B. Se si cerca più di (1)

della forma $e^{d t} = x(t)$

$$x = d e^{d t} \quad \ddot{x} = d^2 e^{d t}$$

$$a d^2 e^{d t} + b d e^{d t} + c e^{d t} = 0$$

$$a d^2 + b d + c = 0$$

$$y = A e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \omega t + B e^{-\frac{b}{2a}t} \sin \omega t$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \Delta < 0$$

N.B. $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sono le due radici

Conseguenza di $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad (e i)^2 = -1, \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Esercizi da TU ES3

(1) $\begin{cases} \ddot{x} - 5x + 4x = 0 \\ x(0) = 1, x'(0) = -1 \end{cases}$

l'equazione caratter. $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$
 ha due radici reali $\Delta = 25 - 16 = 9$
 e quindi l'equazione caratter. ha due radici reali

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1$$

" " d_+ d_-

$$A e^{d_+ t} + B e^{d_- t} = A e^{4t} + B e^t$$

$$x(0) = A + B = 1$$

$$x'(0) = 4A + B = -1$$

$$3A = -2 \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$B = 1 - A = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

da cui $x(t) = -\frac{2}{3} e^{4t} + \frac{5}{3} e^t$ ✓.

Gli altri esercizi di TV Es. 3 da (4) a (5) sono omogenei

Eque 2° ord. coeff. costanti. Non omogenee

$$(6) \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

Da cui non è più vero che x_1 e x_2 sono soluzioni di (6) $\Rightarrow Ax_1 + Bx_2$ è sol. di (6)

$$\begin{aligned} \text{Se } x_1 \text{ è sol. di (6)} \quad & a(A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2) + b(A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2) + c(Ax_1 + Bx_2) \\ &= A(a\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1) + B(a\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2) \\ &= Af + B(a\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2) \end{aligned}$$

$$\text{e } a\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2 = 0$$

Mostrare che Trovare una soluzione particolare di (6)
allora la soluzione generale di (6) sarà data

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) + x_p(t)$$

Con A, B costanti e x_i soluzioni dell'omogenea associata dove $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$

ES 3, (4)

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} - 6x = -\frac{e^{4t}}{4t} + 6 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

cerchiamo una sol. particolare della forma

$$x_p(t) = Ae^{4t} + \underline{Bt + C}$$

$$\dot{x}_p = 4Ae^{4t} + B$$

$$\ddot{x}_p = 16Ae^{4t}$$

$$16Ae^{4t} - (4Ae^{4t} + B) - 6(Ae^{4t} + Bt + C) = -\frac{e^{4t}}{4t} + 6$$

$$e^{4t} (16A - 4A - 6A + 1) - B - 6Bt - 6C - 6 = 0$$

$$6A + 1 = 0, \quad A = -\frac{1}{6}$$

$$6Bt + B + 6C + 6 = 0 \Rightarrow B = 0, \quad C = -1$$

Es! discutere il caso di oscillatore armonico forzato

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

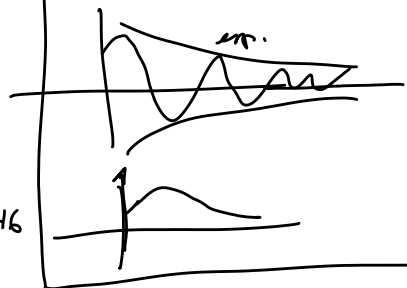
$$m, \alpha, k > 0$$

studiare tutti i casi

$$\Delta = \alpha^2 - 4km$$

interpretare le soluzioni dal punto di vista fisico

$$\text{lim}_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$



$$x_p(t) = -\frac{1}{6}e^{4t} - 1$$

completare l'analisi

(trovare la soluzione generale dell'equazione $\underline{Ax_1 + Bx_2}$
 $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$$

e determinare A e B t.c.

$$x(t) = Ax_1 + Bx_2 + x_p(t)$$

$$\underline{x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{3}}$$