$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \gamma x = 0 \quad (*) \qquad \text{con} \quad \beta = \frac{b}{2a}$$

$$\gamma = \frac{c}{a}$$

$$x(t) = e^{-\beta t}\, y(t)$$

$$\dot{x} = -\beta e^{-\beta t} y + e^{-\beta t}\dot{y}$$

$$\ddot{x} = \beta^2 e^{-\beta t} y - 2\beta e^{-\beta t}\dot{y} + e^{-\beta t}\ddot{y}$$

sostituisco in $(*)$

$$\beta^2 e^{-\beta t} y - 2\beta e^{-\beta t}\dot{y} + e^{-\beta t}\ddot{y} + 2\beta\left(-\beta e^{-\beta t} y + e^{-\beta t}\dot{y}\right) + \gamma e^{-\beta t} y$$

$$\| \quad \text{divido per } e^{-\beta t}$$

$$\ddot{y} - (\beta^2 - \gamma)\, y = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2a}$$

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \beta^2 - \gamma = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\ddot{y} - \frac{\Delta}{4a^2} y = 0 \quad \begin{cases} \Delta = 0 & y(t) = At + B \\ \Delta > 0 & y(t) = Ae^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t} + Be^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t} \\ \Delta < 0 & y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \end{cases}$$

$$\text{con} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Ritorno nelle $x(t) = e^{-\beta t} y(t)$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\frac{b}{2a}t}(At + B) & \Delta = 0 \\ e^{-\frac{b}{2a}t}\left(Ae^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t} + Be^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t}\right) & \Delta > 0 \\ e^{-\frac{b}{2a}t}(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t) & \Delta < 0 \end{cases}$$

Osservazione $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx \rightsquigarrow$

$$a\lambda^2 + b\lambda + \lambda = 0$$

con soluzioni

se $\Delta \geq 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

se $\Delta < 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\omega_0$

se $\Delta > 0$ $\quad x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

se $\Delta = 0$ $\quad x(t) = (At + B) e^{-\frac{b}{2a} t}$ $\quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b}{2a})$

se $\Delta < 0$ $\quad x(t) = e^{-\frac{b}{2a} t} \left(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \right)$

$\longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = t e^{-t} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

① Cerco la soluzione generale dell'eq. omogenea:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad \Delta = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$x_{\text{om}}(t) = (At + B) e^{-t}$$

(2) Soluzione particolare della NON omogenea

"per simpatia"

$$x'' + 2x' + x = t\,e^{-t}$$

Vorrei provare con $x(t) = P(t)\,e^{-t}$

$P(t)$ un polinomio (spero di grado basso)

$$x' = P'e^{-t} - Pe^{-t}$$

$$x'' = P''e^{-t} - 2P'e^{-t} + Pe^{-t}$$

$$x'' + 2x' + x = te^{-t}$$

$$\left(P'' - 2P' + P + 2(P' - P) + P\right)e^{-t} = te^{-t}$$

$$P'' = t \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{t^3}{6}$$

IN GENERALE

$$x'' + 2\beta x + \gamma = p(t)\,e^{\lambda_0 t}$$

① se λ_0

Non è soluzione di $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = 0$

cerco soluzione particolare

DELLA STESSA forma del termine noto

$x(t)_{part} = P(t)\, e^{\lambda_0 t}$ P STESSO GRADO di Φ

② se λ_0 è soluzione

di $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = 0$

$P(t)$ ha grado = (grado di Φ) + 1

se $\Delta \neq 0$

= (grado di Φ) + 2

se $\Delta = 0$

più precisamente se Φ ha grado n:

① $x_{part}(t) = \left(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 t \right) e^{\lambda_0 t}$

② $x_{part}(t) = t^r \left(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 t \right) e^{\lambda_0 t}$

con $r = 1$ se $\Delta \neq 0$; $r = 2$ se $\Delta = 0$

- Mancano esempi fatti in classe.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + x = t e^{2t} \qquad \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$x_{Part}(t) = (At + B) e^{2t} \qquad \lambda_0 = 2 \text{ NON è sol}$$

$$\dot{x} = A e^{2t} + 2(At + B) e^{2t}$$

$$\ddot{x} = 2A e^{2t} + 2A e^{2t} + 4(At + B) e^{2t}$$

$$= 4(A + B) e^{2t} + 4At e^{2t}$$

$$4At e^{2t} + 4(A+B) e^{2t} + 3\left(A + 2At + 2B\right) e^{2t} + (At + B) e^{2t} =$$

$$(4 + 6 + 1) At e^{2t} + (4A + 4B + 3A + 6B + B) e^{2t} = t e^{2t}$$

$$\begin{cases} 11A = 1 \\ 7A + 11B = 0 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{11} \qquad B = -\frac{7}{(11)^2}$$

$$\ddot{x} + x = 3\cos 2t$$

$\cos 2t$ NON risolve l'eq. omogenea

cerco una soluzione

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$$

$$\dot{x} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

$$\ddot{x} = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

$$(-4A + A)\cos 2t + (-4B + B)\sin 2t = 3\cos 2t$$

$$B = 0 \; ; \quad A = -1$$

più in generale

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = e^{t}\cos t$$

se il termine NOTO non risolve la omogenea cioé $1+i$ NON risolve

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ $\checkmark$

$A e^t \cos t + B e^t \sin t$

mi faccio tutti i conti e trovo A, B

Trucco:

se ci sono solo derivate pari:

① se il termine NOTO è pari

cerco soluzioni PARI

② se il termine NOTO è dispari

cerco soluzioni DISPARI

fino a qui

$$\begin{cases} x' = -x + e^{\frac{t}{2}} x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + kx = \cos(\omega t)$$

Determinare k in modo che ci siano soluzioni NON LIMITATE

$$\begin{cases} \dot{y} = 2\sqrt{y}\, e^{-\sqrt{y}} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad y(0) = y_0 \neq 0$$

$y($

Discutere per $y_0 \neq 0$. Discutere l'unicità delle soluzioni per $y_0 = 0$.

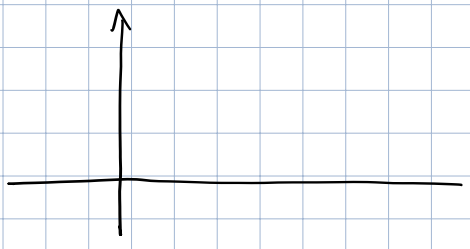
Sol: per separazione di variabili

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{2\sqrt{z}} e^{\sqrt{z}} = t$$

$u = \sqrt{z}$ $\qquad du = \frac{1}{2\sqrt{z}}\, dz$

$$\int_{\sqrt{y_0}}^{\sqrt{y(t)}} e^u\, du = t \qquad e^{\sqrt{y(t)}} - e^{\sqrt{y_0}} = t$$

$$\sqrt{y(t)} = \ln\left(e^{\sqrt{y_0}} + t\right)$$



$$y(t) = \left(\ln\left(e^{\sqrt{y_0}} + t\right)\right)^2 \qquad \text{se } y_0 \neq 0$$

se $y_0 = 0$ una soluzione è $y(t) = 0 \quad \forall t$

Sostengo che anche

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ (\ln(1+t))^2 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

è soluzione. Infatti

$$y(t) = (\ln(1+t))^2$$

$$\dot{y}(t) = 2\,\frac{\ln(1+t)}{1+t}$$

$2|\ln(1+t)|\, e^{-|\ln(1+t)|}$ se $t \geq 0$

$1+t \geq 1$

$-\dfrac{2\ln(1+t)}{1+t}$ punti RISOLVE !