

## SUCCESSIONI

Def. una successione (a valori in  $\mathbb{R}$ ) è una funzione da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ .

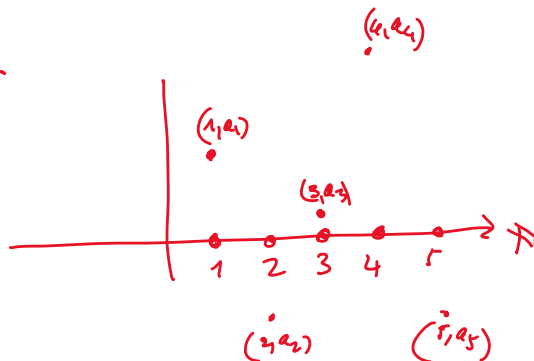
$$f: n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{R}$$

Notazione standard una successione è denota  $\{a_n\}$

N.B. non confondere  $\{a_n\}$  con l'insieme dei suoi valori  
 ossia  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \text{im}(\{a_n\})$   
 $\uparrow$   
 immagine della funzione  $\{a_n\}$

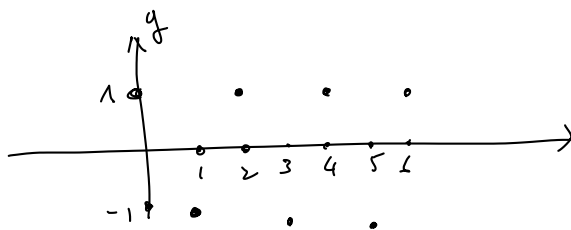
N.B.  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

$$\{a_n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$$



### Esempi

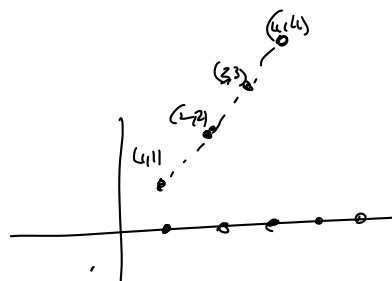
1  $a_n = (-1)^n$ ,  $\text{im}(\{a_n\}) = \{1, -1\}$



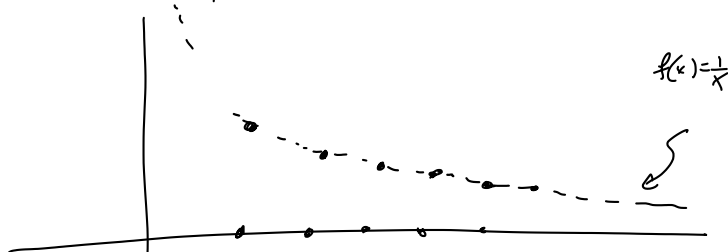
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

2  $a_n = n$

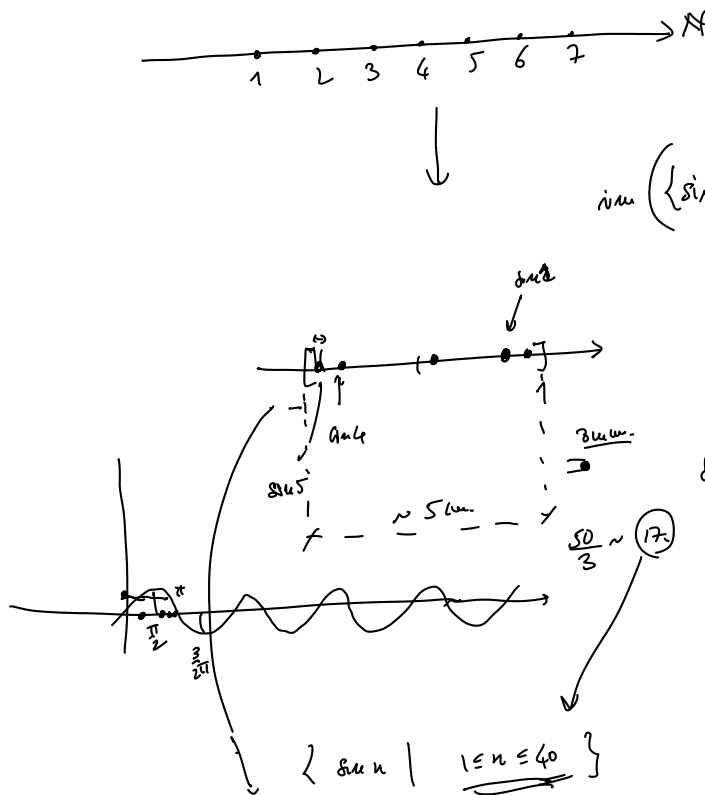
$$\text{im}(\{a_n\}) = \mathbb{N}$$



3,  $a_n = \frac{1}{n}$



4  $\sin n$



$$\text{im}(\{\sin n\}) \subseteq [-1, 1] \\ \subseteq (-1, 1)$$

ES.  $\sin x = \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

il che  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = n$  per qualche  $n$ ,  
 $\Leftrightarrow \pi = \frac{n}{\frac{1}{2} + 2k} = \frac{2n}{1 + 4k} \in \mathbb{Q}$

ma qualcuno ci ha detto che  
 $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

**Teorema**  $\forall \alpha \in [-1, 1] \exists$  una successione  $\{n_k\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.c.  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = \alpha$   $\leftarrow$   $|\sin n_k - \alpha| < 10^{-2} \forall k \geq K$   $\text{per } K$   
 intuitivamente "sin n è avvicina sempre di più ad  $\alpha$ "  
 per  $k$  che cresce

**DEF di limite di una successione (!)**

1. Dato  $L \in \mathbb{R}$  e  $\{a_n\}$  successione, si dice che  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ("L è il limite per n che tende a  $+\infty$  di  $a_n$ " o più semplicemente " $L$  è il limite di  $\{a_n\}$ ", e si scrive anche  $\lim a_n = L$ ),

$$a_n \rightarrow L) \text{ se } \forall \varepsilon > 0 \quad \left( \text{comprie f.sso una} \right. \\ \left. \text{misura data} \right) \\ \exists \underline{N} \in \mathbb{R} \quad \left| \quad |a_n - L| < \varepsilon \right\}, \quad \forall n > \underline{N}$$

↑  
distanza tra  $a_n$  e  $L$

2. Dato  $\{a_n\}$  n. dice che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  se  $\forall M > 0 \quad \exists N \mid$   
 $\boxed{a_n > M}, \quad \forall n > N.$

Analog  $\{a_n\}$  tende a  $-\infty$ , che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  se  $\forall M < 0$   
 $\exists N \mid \boxed{a_n < M}, \quad \forall n > N.$

Esercizi (proprietà agli esercizi di [GE])

Verificare, usando la definizione di limite, che:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$L=0$ . Dato  $\varepsilon > 0$

$\frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \& \quad n \geq N$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n, \quad \boxed{N = \frac{1}{\varepsilon}}$

$\& \quad n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$

[ Se vogliamo il primo naturale  $N$  t.c.  $\frac{1}{n} < \varepsilon$   
 $\& \quad \frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{N} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{N} \quad \& \quad \frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_0} + x, \quad 0 < x < 1$   
 $N = N_0 + 1.$  ]

$\& \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{2} = 1,41... = \underline{\underline{1+1}}, \quad N = 2$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Dato  $\varepsilon > 0$

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n$

$\mid \quad \& \quad n \geq N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$

Risposta

$$N = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$

Fissa  $\varepsilon > 0$ .  $|a_n - L| = \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| = \frac{|2n-1-2n-2|}{n+1}$

$$= \frac{|-3|}{n+1} = \frac{3}{n+1}$$

Voglio risolvere  $\frac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < n+1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 < n, \quad N := \max \left\{ 1, \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right\}$$

Se  $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2-1}) = 0 \quad \checkmark \quad \left( \sqrt{n^2-1} < n \right)$

$$|n - \sqrt{n^2-1} - 0| = n - \sqrt{n^2-1}$$

Dato  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tale che  $|n - \sqrt{n^2-1}| < \varepsilon$  se  $n > N$

$$n - \sqrt{n^2-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \underline{n - \varepsilon} < \sqrt{n^2-1}$$

$$\underline{n - \varepsilon} > 0$$

NB posso assumere che  $0 < \varepsilon < 1$  perché se qualcuno mi dà un'opportuna  $\varepsilon > 0$

me lo so risolvere  $|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$

$\uparrow$   
 $\text{con } \varepsilon < 1 \text{ abbiamo}$   
 $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$

$$\Leftrightarrow (n - \varepsilon)^2 < n^2 - 1$$

$$n^2 - 2\varepsilon n + \varepsilon^2 < n^2 - 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 + 1 < 2\varepsilon n \Leftrightarrow$$

$$\left( \frac{\varepsilon^2 + 1}{2\varepsilon} \right) < n \quad N_1 = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

Altro metodo (più bello)

$$a_n = \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

razionalizziamo

$$= \frac{(n - \sqrt{n^2-1})(n + \sqrt{n^2-1})}{n + \sqrt{n^2-1}} = \frac{n^2 - (n^2-1)}{n + \sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

Dato  $\varepsilon > 0$  voglio risolvere  $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n + \sqrt{n^2-1}$$

osservo che

$$n + \sqrt{n^2 - 1}$$

$$n + \sqrt{n^2 - 1} \geq n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(N_2 > N_1)$$

$$\left( \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad \left( \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - n) = -\infty$$

$$\text{Dato } (M < 0)$$

vorrei trovare N

$$\sqrt{n} - n < M \quad \forall n \geq N$$

non trovo l'M ottimale

$$\rightarrow n - \sqrt{n} > -M \quad \text{ritorno.} \quad -M > 0$$

$$n - \sqrt{n} = n \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\geq \frac{n}{2} > \bar{M}$$

$$\uparrow \quad n > 2\bar{M}$$

$$N \geq 2$$

$$N = \max \{ 2, -2M \}$$

$$2\bar{M}, \quad \bar{M} = -M$$

$$\left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu \quad n \geq 2$$

$$\text{oppure } n \geq 4$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\left( \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4 \right)$$

$$6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$\varepsilon > 0 \quad \left| \frac{\sin n}{n} \right| < \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad \frac{|\sin n|}{n} < \varepsilon$$

$$\text{osservo che } |\sin n| \leq 1$$

$$\leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad N = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

Dato  $M > 0$  voglio trovare n tale che

$$2^n > M \quad \forall n > N$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^n > \log_2 M$$

essendo  $\log_2 x$  strett. crescente

$$n > \log_2 M = N$$

8<sup>a</sup> Dim  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^{\frac{100}{3}}} = +\infty$  ??

oppure è giusto

Fissiamo  $\alpha > 1$  Dato  $\varepsilon > 0$  trovare  $N$  |  $\frac{2^n}{n^\alpha} < \varepsilon$

probabilità voleranno forti anche nel 2° semestre