Ricordiamo: • Data $\{a_n\}$ successione e dato $L \in \mathbb{R}$ si dice

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \overset{DEF}{\iff} \forall \varepsilon>0 \ \exists N>0 \mid |a_n - L| < \varepsilon, \ \forall n>N$$

prima fisso $\varepsilon>0$ (una approssimazione arbitraria)

$$\Updownarrow$$
$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$

• $a_n \to +\infty$ ($\iff \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$)

$\iff \forall M>0 \ \exists N>0 \mid a_n > M, \ \forall n>N$

$a_n \to -\infty \iff \forall M<0, \exists N>0 \mid a_n < M \quad \forall n>N.$

[GE] Cap 3 Es 8

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2n-1}{3n+2}}_{a_n} = \frac{2}{3} \qquad a_n - \frac{2}{3} = \frac{\cancel{6n}-3-\cancel{6n}-4}{(3n+2)3} = -\frac{7}{3}\frac{1}{3n+2}$$

Fisso $\varepsilon>0$, $\left|a_n-\frac{2}{3}\right| = \frac{7}{3}\frac{1}{3n+2} \overset{?}{<} \varepsilon$, $n\in\mathbb{N}$.

$\iff \boxed{\frac{7}{3\varepsilon} < 3n+2}$ $\left(3n+2 > 2 > \frac{7}{3\varepsilon}\right)$ NO non riesco a risolvere

$\Leftarrow \boxed{\frac{7}{3\varepsilon} < 3n}$ $3n<3n+2$ $\iff \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{\varepsilon} < n$

Se fosse stato $\frac{7}{3}\frac{1}{3n-10} < \varepsilon$ avrei avuto che $N>4 \Rightarrow n>N$, $3n-10>0$ ✓

Sia $N := \frac{7}{9}\frac{1}{\varepsilon}$, allora se $n>N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

[GE] Cap 3 Es 5

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n\sin n = +\infty$$

$\forall M>0$ $\quad n^2 - n\sin n = n^2\left(1-\frac{1}{n}\sin n\right) \overset{?}{>} \frac{n^2}{2}$

$$1-\frac{1}{n}\sin n > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} > \frac{\sin n}{n}$$

$|x|\geq x$ $\quad \Leftarrow \frac{1}{2} > \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin n}{n} \Leftarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{n}$ $\quad n>2$

Se $N > 2$ è vero che $1 - \frac{1}{n}\sin n > \frac{1}{2}$, se $n > N$

Se $n > N > 2$ allora $n^2 - n\sin n > \frac{n^2}{2} > M$

se $n > \sqrt{2M}$, $\boxed{N = \max\{2, \sqrt{2M}\}}$

Cap 3, Es 6 $\quad \lim_{n\to+\infty} 2^n - n = +\infty \quad (2^n \to +\infty,\ n \to +\infty)$

$2^n > M \quad n > \log_2 M$ $\quad N$

$(M > 1)$

Dimostriamo che $2^n \geq 2n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

per induzione

base induttiva (1) $n=1$ $\quad 2 = 2^1 \geq 2\cdot 1 = 2$ ✓ ok.

(ii) Assumiamo che sia vero che $2^n \geq 2n$ per un qualche $n \geq 1$

"PRINCIPIO DI INDUZIONE" (è un Teorema)

Siano P_n delle affermazioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$

(esempio P_n : $2^n \geq 2n$)

Se è vero che:

(1) P_1 è vera

(11) dato $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Allora P_n è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$2^{n+1} = 2\,(2^n) \underset{\text{ip. induttiva } P_n}{\geq} 2\,(2n) = 4n \geq 2(n+1)$$

infatti: $\quad 4n \geq 2(n+1) \iff 4n \geq 2n+2 \iff 2n \geq 2$ ✓

Dato $M>0$, $\quad 2^n - n \geq 2n - n = n > M$, $\quad N = M$

Es Dimostrare che $2^n - n^{3/2} \to +\infty$

Suggerimento: dimostrare che $2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 4$.

(i) base induttiva è $n=4$ ✓

(ii) se $n \geq 4$ e $2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Passiamo al calcolo dei limiti

Algebra dei limiti

Teorema 1 Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni t.c.

$a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $a_n + b_n \to \alpha + \beta$

(ii) $a_n b_n \to \alpha\beta$

(iii) se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\alpha}$ $\left(\Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to \frac{\beta}{\alpha}\right)$

(iv) Se $a_n \leq b_n$ per $n \geq N \Rightarrow \alpha \leq \beta$

(v) Se $\{c_n\}$ è t.c. per $n \geq N$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\alpha = \beta$

$\Rightarrow c_n \to \alpha$

Teorema 2. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

(i) $a_n \to +\infty$, $b_n \geq \beta \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq N$ $\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

(ii) $a_n \to -\infty$, $b_n \leq \beta \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq N$ $\Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$

(iii) $a_n \to 0$, e $|b_n| \leq M$, $\forall n$ $\Rightarrow a_n b_n \to 0$

(iv) $a_n \to +\infty$, $b_n \geq \beta > 0$ $\forall n \geq N$ $\Rightarrow a_n b_n \to \underline{\underline{+}}\infty$

$(a_n \to -\infty)$ ......

Teorema 3. (Alcuni limiti notevoli)

1. Sia $A > 0$. $\lim \sqrt[n]{A} = 1$

$$\lim_{n\to+\infty}$$

2. $A>1$, $a\in\mathbb{R}$, $\lim \frac{n^a}{A^n} = 0$

3. $a>0$ $\lim \frac{\log n}{n^a} = 0$

4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

5. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e = 2.7\ldots$ numero di Eulero o Nepero !!

6. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}}}_{\downarrow\, e}\Bigg)^x \to e^x \right)$$

$x>0$

[GE] Cap 3 Es 26 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$

DEF. $n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)!, & \text{se } n\geq 1,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

(definizione ricorsiva).

$0!=1$, $1!=1$, $2!=2$

$3!=3\cdot 2=6$

$4! = 4\ 3! = 24$

$5! = 5\cdot 24 = 120$

$\vdots$

$(n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1)$

$n! \geq n(n-1)(n-2)$. $\forall n\geq 3$.

Per $n\geq 3$

$$\frac{n^2}{n!} \leq \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$$

Uso $a_n\to+\infty$ e $a_n\leq b_n$, (per $n\geq N$).

$\Rightarrow b_n\to+\infty$

$$\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n^2}{n^3\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}}_{\downarrow\, 1} \xrightarrow{\text{A d L}} 0$$

Es 32

$$\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} \to 6$$

$$a^n-b^n = (a-b)\left(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n \text{ termini}}\right)$$

$\forall a,b\in\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}$

tutti i monomi $a^k b^h$ con $k+h=n-1$

$$(n+1)^6-(n-1)^6=\big((n+1)-(n-1)\big)\big(\underline{\underline{(n+1)^5}}+\underline{\underline{(n+1)^4}}(n-1)+\dots+\underline{\underline{(n-1)^5}}\big)$$ ossia $a^k b^{n-1-k}$

$$2\,(n^5\,6+\dots)=12n^5+\text{ t di grado }\le 4.$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{12n^5+a_4n^4+\dots}{2n^5+b_4n^4+\dots}=\frac{12+\overbrace{\frac{a_4}{n}+\dots}^{\to 0}}{2+\underbrace{\frac{b_4}{n}+\dots}_{\to 0}}\to\frac{12}{2}=6.$$