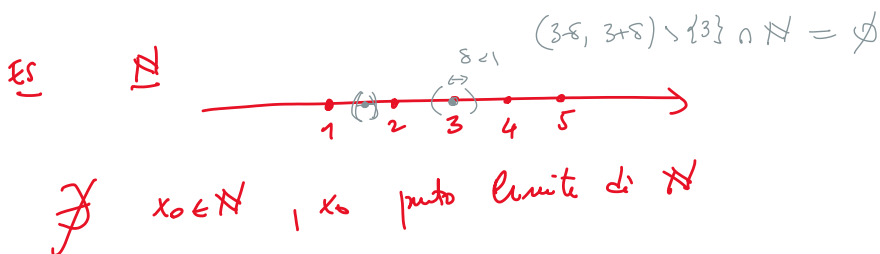
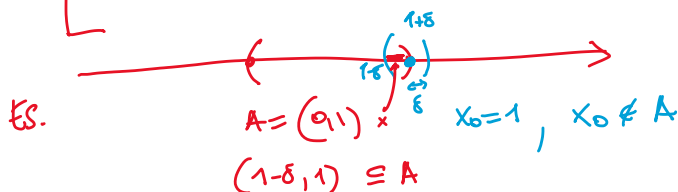


Sia $f: x \in A \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 dominio di f

DEF [ci] $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto limite di A o punto di accumulazione se $\forall \delta > 0 \exists x \in A, x \neq x_0$
 $|x - x_0| < \delta$ [ossia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$]



Es. $\mathbb{Q}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ per la densità dei reali
 $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \delta > 0 \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contiene oo numeri in $\mathbb{Q}$.

(1a) x_0 pto di accumulazione per A , $L \in \mathbb{R}$

si dice che L è il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \underline{\underline{\varepsilon}} > 0 \exists \delta \mid |f(x) - L| < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$\uparrow$
esclude x_0

Esempio (1) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 \quad (A = \mathbb{R})$

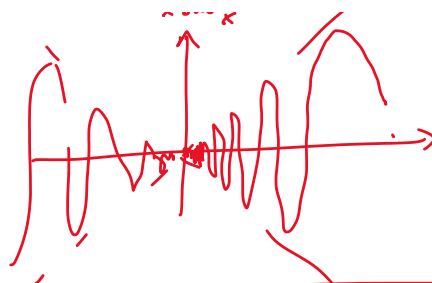
Fissiamo $\varepsilon > 0$, e $|x - x_0| < \delta \leq 1$, δ da determinare in funzione di ε

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |x^2 - x_0^2| = \underbrace{(x - x_0)}_{< \delta} \underbrace{|x + x_0|}_{\leq \delta + 2|x_0|} < \delta \underbrace{|x + x_0|}_{\leq \delta + 2|x_0|} = \delta |x - x_0 + 2x_0| \\ &\leq \delta (|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta (\delta + 2|x_0|) \leq \delta (1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon \\ \text{se } \delta &= \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \right\}. \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 0 è pto di acc. per A .

Fisso $\varepsilon > 0$, $|x \sin \frac{1}{x}| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$ se $|x| < \varepsilon$

$$0 < |x| < \varepsilon =: \delta$$



Def. $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 pto di acc di A e $x_0 \in A$
 f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

& x_0 è un pto di A ma non di accumulazione di A

($\Leftrightarrow \exists \delta \mid (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_0$ è un pto
 (isolato di A)
 $n \in \mathbb{N}$ è pto. isolato di $\mathbb{N}$)

f è sempre continua in x_0 pto isolato di A

Os. f è cont. in $x_0 \in A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \mid$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall \quad |x - x_0| < \delta$$

Esempi

$$\left(|x_1 - y_1| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \right. \\ \left. \forall x, y \in \mathbb{R} \right)$$

① $|x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$

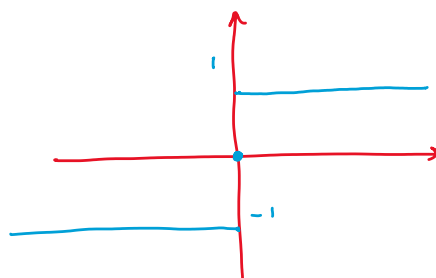
Prendi $x_0 \in \mathbb{R} \quad |x| - |x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

Prendi $\varepsilon > 0$

② $\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

"signum(x)"



Non è continua in $x_0 = 0$

$$|\text{sgn}(x) - \text{sgn}(0)| = |\text{sgn}(x)| = 1 \quad \forall x \neq 0$$

o — o — o

5 Teoremi

... ..

Teo 1 (Algebra dei Limiti). x_0 pto di accumulazione per π

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$$

$$(iii) \quad \alpha \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$$

Teo 2 (funzioni continue). Le seguenti funzioni sono continue sul loro dominio di definizione:

$$- x^m \quad (m \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{Z}, \underline{A = \mathbb{R} \setminus \{0\}})$$

$\nwarrow$ $A = \mathbb{R}$ $\nearrow$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$- x^\alpha \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > 0, A = [0, +\infty) \\ \alpha < 0, A = (0, +\infty) \end{array} \right)$$

$$\bullet a^x \quad (a > 0; x \in \mathbb{R} = A), \quad \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, A = (0, +\infty))$$

$a^x \quad a > 1$ $0 < a < 1$

$$\bullet \sin x, \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{tg} x \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \operatorname{cotg} x \quad (x \neq k\pi)$$

$$\arcsin x \quad (x \in [-1, 1])$$

$$\arccos x \quad (x \in [-1, 1])$$

$$\arctan x \quad (x \in \mathbb{R})$$

o — o — o

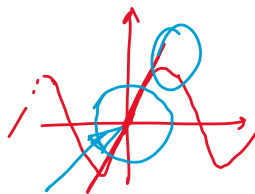
Teo 3 (Alcuni limiti notevoli)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\left(\frac{x}{\arctan x} = \frac{1}{\frac{\arctan x}{x}} \rightarrow 1 \right)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Teo 4 (Confronto). $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto accumulaz
 $f \leq g \leq h$ in un intorno di x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \alpha \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$$

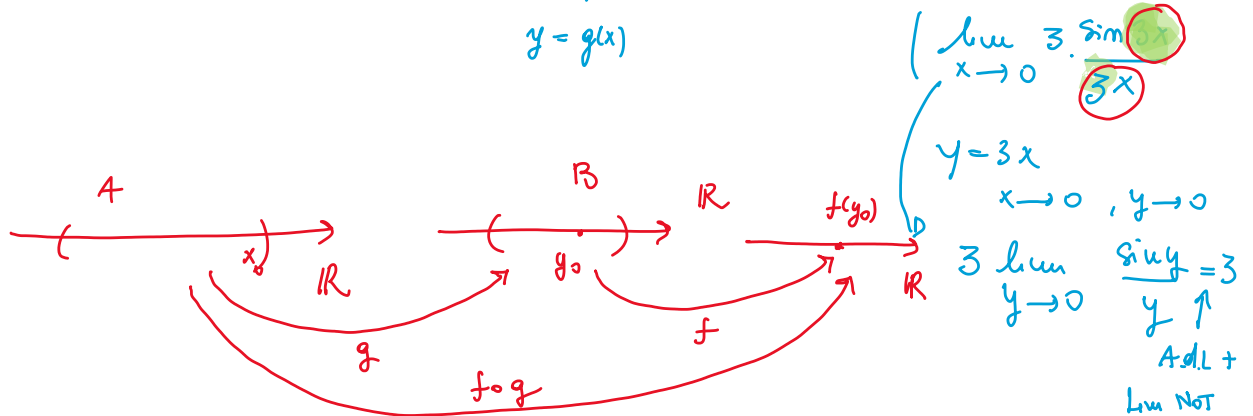
Teo 5 ("cambio di variabili"). $g: A \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$
 $f: B \rightarrow \mathbb{R}$

Se x_0 pto limite per A , y_0 pto limite per B ;

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, f continua in y_0 .

Allora, $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0)$

$y = g(x)$

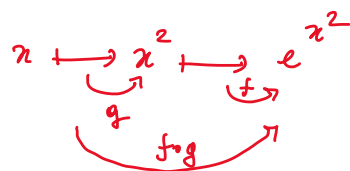


Esempi

1) e^{x^2}

Gaussiana

$f(y) = e^y$, $g(x) = x^2$



2) $\log(1 + \sin x) = f \circ g(x)$

con

$g(x) = 1 + \sin x$

$f(y) = \log(y)$

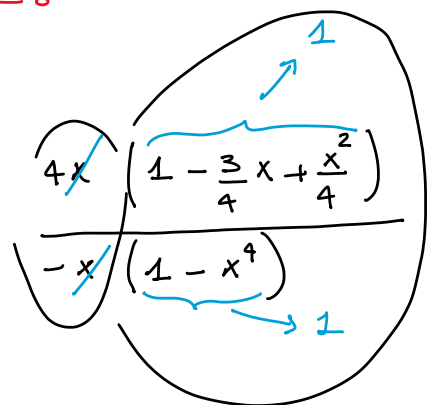
$A = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

Esercizi [6E] Cap 5

Es. 87

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x \rightarrow 0}$

Applicando la regola di L'Hôpital
 $\uparrow$
 $= -4$



Es. 92

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 4x)}{x} =$

formula addiz. fin x

$\uparrow$
 $\lim_{x \rightarrow 0}$

$\frac{\sin \pi \cos 4x + \cos \pi \sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 4x}{x} = -4$

m

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = -4$$

↑
cambio
variabili

$$y = 3x$$

$$x \rightarrow 0 \quad y = 3x \rightarrow 0$$

Es. 134

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}}$$

Attenzione: il dominio di $f(x) = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}}$ è

$$A = \{x \mid x > 0 \text{ e } \sin x > 0\}$$

(Eser.: scrivere A come unione di intervalli)

ma nel calcolare il limite possiamo prendere come dominio l'intervallo $(0, 1)$. (Perché?)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \right)$$

$$\stackrel{\text{A.d.L.}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{\sin x}} \stackrel{y = \sqrt{\sin x}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

lim. notevole.

Es. 99

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Esercizi dal DEMIDOVIC

[D] 197

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

... 2.2

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \stackrel{\text{A. d. L.}}{=} 3x$$

$$[D] 204 \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} \stackrel{\text{A. d. L.}}{=} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} (x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 4) \stackrel{\text{A. d. L.}}{=} 12$$

continuità di $x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{x}$ e A. d. L.

$$[D] 230 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} \stackrel{y = \pi - x}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{y}{2}}{y} \stackrel{\text{lim. noti}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{y} \stackrel{\text{A. d. L.}}{=} 0$$