

AM110 – Definizione generale di limite

Indicazione. In tutti gli esercizi si usi direttamente la definizione di limite in $\mathbb{R}^*$, che viene qui richiamata, scegliendo esplicitamente, a seconda dei casi, δ , M o M' in funzione di un assegnato ε o M .

Richiamo della definizione. Sia $x \in \mathbb{R}$. Un qualunque intervallo aperto che contiene x prende il nome di *intorno* di x . Un intorno di $+\infty$ è un intervallo $(a, +\infty)$; un intorno di $-\infty$ è un intervallo $(-\infty, b)$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia x_0 un punto di accumulazione per A in $\mathbb{R}^*$, sia $L \in \mathbb{R}^*$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che L è il *limite di f per x che tende a x_0* , e scriviamo

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

se

$$\forall V \text{ intorno di } L, \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 : \quad f(x) \in V, \quad \forall x \in (A \cap U) \setminus \{x_0\}.$$

Questa definizione riunisce i nove casi che si ottengono a seconda che x_0 e L siano numeri reali oppure $\pm\infty$.

1. Nella colonna di sinistra dimostrare, mediante la definizione, i limiti assegnati. Nella colonna di destra determinare anzitutto il limite in $\mathbb{R}^*$, se esiste, e poi dimostrare direttamente dalla definizione il risultato ottenuto.

Limite assegnato

- (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2} = +\infty.$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -1} -\frac{1 + |x|}{(x + 1)^2} = -\infty.$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 1}{2x^5 + 7} = \frac{3}{2}.$
- (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + x}{x^6 + 1} = +\infty.$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4 + x^2} = +\infty.$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + x}{2x^4 + 3} = \frac{5}{2}.$
- (viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^6 + 1}{x^5 + 2} = -\infty.$
- (ix) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^9 - x}{x^8 + 1} = -\infty.$
- (x) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{x + 10} = 2.$
- (xi) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x - 4)^4} = +\infty.$
- (xii) $\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2 + 1}{|x - 1|^3} = -\infty.$

Limite da determinare

- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}.$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt[4]{|x - 3|}}.$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}.$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^5 + x^2}{x^4 + 1}.$
- (v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 2}.$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x}{x^6 + 1}.$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$
- (viii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + x^2}{x^4 + 1}.$
- (ix) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]} x.$
- (x) $\lim_{x \rightarrow 0} x|x|.$
- (xi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x).$
- (xii) $\lim_{x \rightarrow -2} -\frac{x^4 + 1}{(x + 2)^2}.$

2. Dimostrare i seguenti limiti direttamente dalla definizione. Qui $[x]$ e $\{x\} = x - [x]$ denotano rispettivamente la parte intera e la parte frazionaria di x .

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x \right) = 0.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x^2]}{x^2 + 1} = 1.$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \{x\}} - x \right) = 0.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]^3}{x^2} = +\infty.$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[x]^3}{x^2} = -\infty.$$

- 3*. (i) Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

- (ii) Stabilire se esiste in $\mathbb{R}^*$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x^2\}.$$

- (iii) Posto

$$f(x) = x^2 \chi_{\mathbb{Q}}(x) + x^4 \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x),$$

dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$