

AM110 – Definizione generale di limite

Soluzioni

In tutte le verifiche si usa direttamente la definizione. Le scelte proposte per δ , M o M' non sono naturalmente uniche.

1. Limite assegnato.

(i) Per $x \neq 2$,

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2,$$

quindi

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2|.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = \varepsilon$.

(ii) Se $0 < |x - 2| < 1$, allora $x^2 + 3 \geq 3$ e dunque

$$\frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2} \geq \frac{3}{(x - 2)^2}.$$

Dato $M > 0$, scegliendo

$$\delta = \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{3}{M}} \right\}$$

si ottiene $f(x) > M$ per $0 < |x - 2| < \delta$.

(iii) Poiché $1 + |x| \geq 1$,

$$-\frac{1 + |x|}{(x + 1)^2} \leq -\frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Dato $M < 0$, basta scegliere

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{-M}}.$$

Infatti $0 < |x + 1| < \delta$ implica $-1/(x + 1)^2 < M$.

(iv) Per $x \geq 1$,

$$\left| \frac{3x^5 - x^2 + 1}{2x^5 + 7} - \frac{3}{2} \right| = \frac{2x^2 + 19}{4x^5 + 14} \leq \frac{21}{4x^3}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, è sufficiente prendere

$$M = \max \left\{ 1, \left(\frac{21}{4\varepsilon} \right)^{1/3} \right\}.$$

(v) Per $x \geq 1$,

$$\frac{x^7 + x}{x^6 + 1} \geq \frac{x^7}{2x^6} = \frac{x}{2}.$$

Dato $M > 0$, scegliendo $M' = \max\{1, 2M\}$, da $x > M'$ segue $f(x) > M$.

(vi) Si ha

$$\sqrt[4]{x^4 + x^2} \geq \sqrt[4]{x^4} = |x|.$$

Dato $M > 0$, poniamo $M' = -M < 0$. Se $x < M'$, allora $|x| = -x > M$, quindi $\sqrt[4]{x^4 + x^2} > M$.

(vii) Per $x \leq -1$,

$$\left| \frac{5x^4 + x}{2x^4 + 3} - \frac{5}{2} \right| = \frac{|2x - 15|}{4x^4 + 6} \leq \frac{17}{4|x|^3}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, si può scegliere

$$M' = -\max \left\{ 1, \left(\frac{17}{4\varepsilon} \right)^{1/3} \right\}.$$

(viii) Per $x \geq 2$,

$$\frac{x^6 + 1}{x^5 + 2} \geq \frac{x^6}{2x^5} = \frac{x}{2},$$

perciò

$$-\frac{x^6 + 1}{x^5 + 2} \leq -\frac{x}{2}.$$

Dato $M < 0$, basta prendere $M' = \max\{2, -2M\}$.

(ix) Scriviamo

$$\frac{x^9 - x}{x^8 + 1} = x \frac{x^8 - 1}{x^8 + 1}.$$

Se $x \leq -2$, allora $(x^8 - 1)/(x^8 + 1) \geq 1/2$; essendo $x < 0$,

$$\frac{x^9 - x}{x^8 + 1} \leq \frac{x}{2}.$$

Dato $M < 0$, scegliendo $M' = \min\{-2, 2M\}$, da $x < M'$ segue $f(x) < M$.

(x) Ponendo $u = \sqrt[3]{x + 10}$,

$$|u - 2| = \frac{|x + 2|}{u^2 + 2u + 4} \leq \frac{|x + 2|}{3},$$

poiché $u^2 + 2u + 4 = (u + 1)^2 + 3 \geq 3$. Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = 3\varepsilon$.

(xi) Dato $M > 0$, scegliamo $\delta = M^{-1/4}$. Se $0 < |x - 4| < \delta$, allora

$$\frac{1}{(x - 4)^4} > M.$$

(xii) Poiché $x^2 + 1 \geq 1$,

$$-\frac{x^2 + 1}{|x - 1|^3} \leq -\frac{1}{|x - 1|^3}.$$

Dato $M < 0$, basta scegliere

$$\delta = (-M)^{-1/3}.$$

Limite da determinare.

(i) Il limite non esiste in $\mathbb{R}^*$. Infatti, per $t > 0$,

$$\frac{(1+t)^2 - 1}{t} = 2 + t, \quad \frac{(1-t)^2 - 1}{t} = -2 + t.$$

Se esistesse un limite finito L , prendendo $\varepsilon = 1$, per $t > 0$ sufficientemente piccolo entrambi i numeri dovrebbero distare meno di 1 da L , ma la loro distanza è 4, assurdo. Il limite non può essere $+\infty$, perché per $x < 1$ vicino a 1 la funzione è negativa; non può essere $-\infty$, perché per $x > 1$ vicino a 1 la funzione è positiva.

(ii) Il limite è $+\infty$. Dato $M > 0$, scegliendo

$$\delta = \frac{1}{M^4}$$

si ha, per $0 < |x - 3| < \delta$,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{|x - 3|}} > M.$$

(iii) Il limite è $-\infty$. Dato $M < 0$, scegliendo

$$\delta = (-M)^{-3}$$

si ha, per $0 < |x| < \delta$,

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}} < M.$$

(iv) Il limite è $-\infty$. Per $x \geq 1$,

$$\frac{x^5 + x^2}{x^4 + 1} \geq \frac{x^5}{2x^4} = \frac{x}{2}.$$

Dato $M < 0$, basta scegliere $M' = \max\{1, -2M\}$.

(v) Il limite è 2. Per $x \leq -1$,

$$\left| \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 2} - 2 \right| = \frac{|-3x - 3|}{x^4 + 2} \leq \frac{6}{|x|^3}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta porre

$$M' = -\max\left\{1, \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{1/3}\right\}.$$

(vi) Il limite è $-\infty$, perché identicamente

$$\frac{x^7 + x}{x^6 + 1} = x.$$

Dato $M < 0$, possiamo prendere $M' = M$.

(vii) Il limite è $1/2$. Per $x > 0$,

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

Inoltre

$$\left| \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2} \right| = \frac{x}{2(\sqrt{x^2 + x} + x)^2} \leq \frac{1}{8x}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $M' = 1/(8\varepsilon)$.

(viii) Il limite è $+\infty$. Se $x \leq -1$,

$$\frac{x^6 + x^2}{x^4 + 1} \geq \frac{x^6}{2x^4} = \frac{x^2}{2}.$$

Dato $M > 0$, basta porre

$$M' = -\max\{1, \sqrt{2M}\}.$$

(ix) Il limite non esiste in $\mathbb{R}^*$. Per escludere $+\infty$, fissiamo $M = 0$: per ogni soglia $M' > 0$ esiste un intero dispari $n > M'$, e allora $(-1)^{[n]}n = -n < 0$. Analogamente non può valere il limite $-\infty$, perché per ogni soglia esistono interi pari arbitrariamente grandi sui quali il valore è positivo. Infine, se il limite fosse un numero reale L , prendendo $\varepsilon = 1$ e un intero pari $n > \max\{M', |L| + 1\}$ si avrebbe $|(-1)^{[n]}n - L| = |n - L| > 1$, contro la definizione.

(x) Il limite è 0, perché

$$|x|x| = |x|^2.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

(xi) Il limite è 0. Per $x < 0$,

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \sqrt{x^2 + 1} - |x| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + |x|} \leq \frac{1}{2|x|}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta prendere $M' = -1/(2\varepsilon)$.

(xii) Il limite è $-\infty$. Poiché $x^4 + 1 \geq 1$,

$$-\frac{x^4 + 1}{(x + 2)^2} \leq -\frac{1}{(x + 2)^2}.$$

Dato $M < 0$, basta scegliere $\delta = (-M)^{-1/2}$.

2. (i) Posto $a = \sqrt[3]{x^3 + x}$, per $x > 0$ si ha $a > x$ e

$$a - x = \frac{x}{a^2 + ax + x^2} < \frac{1}{3x}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $M = 1/(3\varepsilon)$, per $x > M$ si ha $|a - x| < \varepsilon$.

(ii) Dalla disuguaglianza

$$x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2$$

segue

$$\left| \frac{[x^2]}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{x^2 + 1 - [x^2]}{x^2 + 1} < \frac{2}{x^2 + 1} < \frac{2}{x^2}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta prendere $M = \sqrt{2/\varepsilon}$.

(iii) Per $x > 0$,

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \{x\}} - x = \frac{\{x\}}{\sqrt{x^2 + \{x\}} + x} < \frac{1}{2x}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $M = 1/(2\varepsilon)$.

(iv) Se $x > 2$, allora $[x] > x - 1 > x/2$, e dunque

$$\frac{[x]^3}{x^2} > \frac{x}{8}.$$

Dato $M > 0$, basta scegliere $M' = \max\{2, 8M\}$.

(v) Se $x < 0$, allora $[x] \leq x$, quindi, essendo il cubo crescente, $[x]^3 \leq x^3$. Pertanto

$$\frac{[x]^3}{x^2} \leq x.$$

Dato $M < 0$, basta scegliere $M' = M$.

3*. (i) Poiché $[y] = y - \{y\}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, per $x \neq 0$ si ha

$$x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 - x \left\{ \frac{1}{x} \right\}.$$

Di conseguenza

$$\left| x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 \right| = |x| \left\{ \frac{1}{x} \right\} < |x|.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta quindi scegliere $\delta = \varepsilon$.

- (ii) Il limite non esiste in $\mathbb{R}^*$. La funzione è sempre compresa tra 0 e 1, quindi il limite non può essere $\pm\infty$. Supponiamo che esista un limite finito L e scegliamo $\varepsilon = 1/8$. Per ogni $M > 0$ possiamo scegliere un intero $n > M$; allora

$$\{n^2\} = 0.$$

Inoltre, posto $y = \sqrt{n^2 + 1/2} > n > M$, si ha

$$\{y^2\} = \left\{n^2 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

La definizione imporrebbe dunque simultaneamente $|L| < 1/8$ e $|L - 1/2| < 1/8$, impossibile.

- (iii) Sia $M > 0$ e poniamo

$$R = \max\{1, \sqrt{M}\}.$$

Se $|x| > R$, allora $x^2 > M$ e, poiché $|x| > 1$, anche $x^4 \geq x^2 > M$. Pertanto, sia che x sia razionale sia che sia irrazionale, $f(x) > M$. Per $x \rightarrow +\infty$ basta scegliere $M' = R$; per $x \rightarrow -\infty$ basta scegliere $M' = -R$.