

AM110 – Esercizi sull'algebra dei limiti

1. Determinare i seguenti limiti, giustificando la risposta.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 5}{x^3 - x^2 + 4}.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{|x|x^2 + 19}.$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3x^{1/4}}{x + \{x\}}.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + 2x}{3x - |x|}.$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^+ + 2x^-}{1 + |x|}.$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\{x\} + \sqrt{x} + 1}{x + 3}.$$

$$(ix) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x] - \sqrt{x} + 2}{12 - x}.$$

$$(x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-n)^3 + n^2}{(-1)^n n^4 - \sqrt{n}}.$$

2. Determinare i seguenti limiti. Quando utile, semplificare l'espressione sostituendo un fattore con uno ad esso equivalente nel senso della Definizione 2.26.

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n^2 + 1}}{2n^2 - \sqrt{n}}.$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - \sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n^6 + n^2} + 5n}.$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + \sqrt{n})\sqrt{n^2 + 1}}{(2n^3 - n)(1 + 1/n)}.$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^6 + 4n^3 + 1}}{n^2 \sqrt{n + 1}}.$$

$$(v) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n} \right).$$

Suggerimento. Se $a_n \sim b_n$, la sostituzione di a_n con b_n è lecita nei prodotti e nei quozienti, come segue dall'Osservazione 2.27. In generale, invece, non è lecita all'interno di una somma o di una differenza.

3*. Nei casi (iii), (v), (ix) e (x) dell'Esercizio 1, sia L il limite trovato. Dato un intorno V di L , determinare esplicitamente un intorno U del punto a cui tende la variabile tale che

$$f(x) \in V, \quad x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\},$$

con le ovvie modifiche di notazione nel caso di una successione.

4*. (i) Siano

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 1}.$$

Determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \max\{f(x), g(x)\}.$$

(ii) Più in generale, siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}^*A$, e supponiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M,$$

con $L, M \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{L, M\}.$$

(iii) Dedurre che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \min\{f(x), g(x)\} = \min\{L, M\},$$

e, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^+(x) = L^+, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f^-(x) = L^-.$$