

AM110 – Esercizi sull'algebra dei limiti
Soluzioni sintetiche

1. (i) Per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 5}{x^3 - x^2 + 4} = \frac{16 - 24 + 4 - 5}{8 - 4 + 4} = -\frac{9}{8}.$$

(ii) Per $x < 0$ si ha $|x| = -x$. Dividendo numeratore e denominatore per x^3 ,

$$\frac{2x^3 - x + 1}{|x|x^2 + 19} = \frac{2 - x^{-2} + x^{-3}}{-1 + 19x^{-3}} \rightarrow -2.$$

(iii) Poiché $0 \leq \{x\} < 1$,

$$\frac{\sqrt{x} - 3x^{1/4}}{x + \{x\}} = \frac{x^{-1/2} - 3x^{-3/4}}{1 + \{x\}/x} \rightarrow 0.$$

(iv)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{-2}}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

(v) Per $x < 0$, $x = -|x|$, e quindi

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + x^{-2}}} \rightarrow -1.$$

(vi) Per $x < 0$, $|x| = -x$; dunque

$$\frac{|x| + 2x}{3x - |x|} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

(vii) Se $x \geq 0$, $x^+ = x$ e $x^- = 0$; se $x < 0$, $x^+ = 0$ e $x^- = -x$. In entrambi i casi

$$\left| \frac{x^+ + 2x^-}{1 + |x|} \right| \leq \frac{2|x|}{1 + |x|} \rightarrow 0.$$

(viii) Essendo $0 \leq \{x\} < 1$,

$$\left| \frac{\{x\} + \sqrt{x} + 1}{x + 3} \right| \leq \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 3} \rightarrow 0.$$

(ix) Poiché $[x] = x - \{x\}$,

$$\frac{[x] - \sqrt{x} + 2}{12 - x} = \frac{1 - \{x\}/x - x^{-1/2} + 2/x}{12/x - 1} \rightarrow -1.$$

(x) Il numeratore ha modulo al più $n^3 + n^2$, mentre

$$|(-1)^n n^4 - \sqrt{n}| \geq n^4 - \sqrt{n}.$$

Pertanto

$$\left| \frac{(-n)^3 + n^2}{(-1)^n n^4 - \sqrt{n}} \right| \leq \frac{n^3 + n^2}{n^4 - \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

2. (i)

$$\sqrt{n^4 + 3n^2 + 1} \sim n^2, \quad 2n^2 - \sqrt{n} \sim 2n^2,$$

quindi il limite è $1/2$.

(ii)

$$3n^3 - \sqrt{n} + (-1)^n \sim 3n^3, \quad \sqrt{n^6 + n^2} + 5n \sim n^3,$$

quindi il limite è 3.

(iii)

$$\begin{aligned} n^2 + \sqrt{n} &\sim n^2, & \sqrt{n^2 + 1} &\sim n, \\ 2n^3 - n &\sim 2n^3, & 1 + \frac{1}{n} &\sim 1, \end{aligned}$$

e dunque il limite è 1/2.

(iv)

$$\sqrt{n^6 + 4n^3 + 1} \sim n^3, \quad n^2 \sqrt{n+1} \sim n^{5/2},$$

perciò il rapporto si comporta come $\sqrt{n}$ e tende a $+\infty$.

(v) Qui non si possono sostituire separatamente i due addendi con n . Razionalizzando,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n} &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2/n} + \sqrt{1 + 1/n}} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Questo mostra concretamente perché l'equivalenza non consente, in generale, sostituzioni nelle differenze.

3*. Indichiamo con f la funzione (o successione) che compare nel limite considerato. In ciascun caso, poiché V è un intorno di L , scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq V$$

quando L è finito.

(iii) Qui $L = 0$. Per $x > 0$,

$$|f(x)| \leq \frac{\sqrt{x} + 3x^{1/4}}{x} = x^{-1/2} + 3x^{-3/4}.$$

Ponendo

$$N = \max \left\{ 1, \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2, \left(\frac{6}{\varepsilon} \right)^{4/3} \right\}, \quad U = (N, +\infty],$$

si ha, per $x > N$,

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e quindi $f(x) \in V$.

(v) Qui $L = -1$. Per $x < 0$,

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}$$

e

$$|f(x) + 1| = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{1+x^{-2}}(\sqrt{1+x^{-2}}+1)} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Se

$$N = \max \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\}, \quad U = [-\infty, -N),$$

allora $x \in U$ implica $|f(x) + 1| < \varepsilon$, dunque $f(x) \in V$.

(ix) Qui $L = -1$. Usando $[x] = x - \{x\}$, per $x > 12$,

$$|f(x) + 1| = \frac{|14 - \{x\} - \sqrt{x}|}{x - 12} \leq \frac{\sqrt{x} + 14}{x - 12}.$$

Per $x \geq 24$, $x - 12 \geq x/2$, quindi

$$|f(x) + 1| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{28}{x}.$$

Ponendo

$$N = \max \left\{ 24, \frac{16}{\varepsilon^2}, \frac{56}{\varepsilon} \right\}, \quad U = (N, +\infty],$$

si ottiene $|f(x) + 1| < \varepsilon$ per ogni $x > N$, e quindi $f(x) \in V$.

(x) Qui $L = 0$. Per $n \geq 2$,

$$|(-1)^n n^4 - \sqrt{n}| \geq n^4 - \sqrt{n} \geq \frac{1}{2} n^4,$$

mentre $|(-n)^3 + n^2| \leq 2n^3$. Pertanto

$$|f(n)| \leq \frac{4}{n}.$$

Se

$$N = \max \left\{ 2, \frac{4}{\varepsilon} \right\},$$

allora $n > N$ implica $|f(n)| < \varepsilon$, cioè $f(n) \in V$. Equivalentemente si può prendere come intorno di $+\infty$ l'intervallo $U = (N, +\infty]$.

4*. (i) Per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

Inoltre

$$g(x) - f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1} < 0 \quad (x > 0),$$

quindi, vicino a $+\infty$, $\max\{f, g\} = f$. Ne segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \max\{f(x), g(x)\} = 1.$$

(ii) Se $L < M$, allora

$$g - f \longrightarrow M - L > 0,$$

e per la permanenza del segno $g > f$ vicino a x_0 . Quindi $\max\{f, g\} = g$ vicino a x_0 e il limite vale M . Analogamente, se $L > M$, il limite vale L .

Resta il caso $L = M$. Fissato $\varepsilon > 0$, vicino a x_0 si ha simultaneamente

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \quad L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

Di conseguenza

$$L - \varepsilon < \max\{f(x), g(x)\} < L + \varepsilon,$$

e dunque $\max\{f, g\} \rightarrow L$. In tutti i casi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{L, M\}.$$

(iii) Poiché

$$\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\},$$

il punto precedente e l'algebra dei limiti danno

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \min\{f(x), g(x)\} = \min\{L, M\}.$$

Infine, usando

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\},$$

si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^+(x) = \max\{L, 0\} = L^+, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f^-(x) = \max\{-L, 0\} = L^-.$$