

AM110 – Esercizi sulla definizione di limite

Indicazioni. I seguenti esercizi sono basati sulla definizione classica di limite (Cauchy) per una funzione definita sui numeri reali tranne al più un punto x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (*)$$

Quindi, nei casi in cui il limite esiste, assegnato $\varepsilon > 0$ bisogna trovare $\delta > 0$ tale che valga (*); se il limite non esiste, si può ragionare per assurdo: supponendo che esista un limite $L \in \mathbb{R}$, si deve ottenere una contraddizione.

1. Usando la definizione (*), si dimostri che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ nei seguenti casi:

- (i) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 2, \quad L = 3.$
- (ii) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \quad (x \neq 2), \quad x_0 = 2, \quad L = 5.$
- (iii) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2, \quad L = \frac{1}{2}.$
- (iv) $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}, \quad x_0 = 1, \quad L = \frac{2}{3}.$
- (v) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4, \quad L = 2.$
- (vi) $f(x) = |x - 2|^{1/2}, \quad x_0 = 2, \quad L = 0.$
- (vii) $f(x) = |x|^{1/2}, \quad x_0 = 4, \quad L = 2.$
- (viii) Ricordando che $x^+ = \max\{x, 0\}$, $f(x) = x^+, \quad x_0 = -1, \quad L = 0.$
- (ix) $f(x) = x[x], \quad x_0 = 0, \quad L = 0.$
- (x) $f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right] \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0, \quad L = 1.$
- (xi) $f(x) = x \left\{ \frac{1}{x} \right\} \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0, \quad L = 0.$
- (xii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad L = 0.$

2. Nei seguenti casi, stabilire se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$; se il limite esiste, determinarlo e dimostrarlo usando la definizione (*); se non esiste, si proceda per assurdo a partire dalla definizione.

- (i) $f(x) = [x], \quad x_0 = \frac{3}{2}.$
- (ii) $f(x) = \{x\}, \quad x_0 = \frac{3}{2}.$
- (iii) $f(x) = [x], \quad x_0 = 0.$
- (iv) $f(x) = \{x\}, \quad x_0 = 0.$
- (v) $f(x) = \frac{x^+}{x} \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0.$
- (vi) $f(x) = [x], \quad x_0 = 1.$
- (vii) $f(x) = [x] + [-x], \quad x_0 = 1.$
- (viii) $f(x) = |x| [x], \quad x_0 = 0.$

$$(ix) \quad f(x) = |x| \{x\}, \quad x_0 = 0.$$

$$(x) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(xi) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(xii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \end{cases} \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0.$$

$$(xiii) \text{ Ponendo }^1 \varphi(x) = \{x\}\{1-x\}, \text{ sia } f(x) = \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0.$$

$$(xiv) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(xv) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x = 1/n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(xvi) \quad f(x) = (-1)^{[1/|x|]} \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0.$$

3*. Per una terna assegnata (f, x_0, L) e per $\varepsilon > 0$, si ponga

$$\delta_*(\varepsilon) := \sup\left(\{0\} \cup \left\{\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\right\}\right).$$

Nel caso in cui l'insieme di tali δ sia illimitato superiormente, si pone $\delta_*(\varepsilon) = +\infty$.

(i) Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \delta_*(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Dedurre che L non è il limite di f per $x \rightarrow x_0$ se e solo se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\delta_*(\varepsilon_0) = 0.$$

(ii) Calcolare $\delta_*(\varepsilon)$ nei seguenti casi:

$$(a) \quad f(x) = 3x - 1, \quad x_0 = 2, \quad L = 5;$$

$$(b) \quad f(x) = |x - 2|^{1/2}, \quad x_0 = 2, \quad L = 0;$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{x^+}{x} \quad (x \neq 0), \quad x_0 = 0, \quad L = \frac{1}{2};$$

$$(d) \quad f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad L = 1.$$

¹Si studi innanzitutto il grafico di φ , dimostrando, in particolare, che $\varphi(x+m) = \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

Soluzioni

1. (i)

$$|2x^2 - 3x + 1 - 3| = |2x + 1| |x - 2|.$$

Se $|x - 2| < 1$, allora $|2x + 1| < 7$; basta quindi

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}.$$

(ii) Per $x \neq 2$, $f(x) = x + 3$, dunque

$$|f(x) - 5| = |x - 2|.$$

Basta $\delta = \varepsilon$.

(iii)

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|x - 2|}{2|x|}.$$

Se $|x - 2| < 1$, allora $|x| > 1$; basta

$$\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}.$$

(iv)

$$\left| \frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{|x-1|}{3|x+2|}.$$

Se $|x - 1| < 1$, allora $|x + 2| > 2$; basta

$$\delta = \min\{1, 6\varepsilon\}.$$

(v) Se $|x - 4| < 1$, allora $x > 0$ e

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x - 4|}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{|x - 4|}{2}.$$

Basta $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$.

(vi)

$$||x - 2|^{1/2} - 0| = |x - 2|^{1/2}.$$

Basta $\delta = \varepsilon^2$.

(vii) Se $|x - 4| < 1$, allora $x > 0$ e ci si riduce al punto (v). Basta

$$\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}.$$

(viii) Se $|x + 1| < 1$, allora $x < 0$ e quindi $x^+ = 0$. Basta, ad esempio, $\delta = 1$ per ogni $\varepsilon > 0$.

(ix) Se $|x| < 1$, allora $[x] = 0$ per $x > 0$ e $[x] = -1$ per $x < 0$; pertanto

$$|x[x]| \leq |x|.$$

Basta $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$.

(x) Poiché

$$\left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} \right\},$$

si ha

$$\left| x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 \right| = |x| \left\{ \frac{1}{x} \right\} < |x|.$$

Basta $\delta = \varepsilon$.

(xi) Poiché $0 \leq \{1/x\} < 1$,

$$\left| x \left\{ \frac{1}{x} \right\} \right| < |x|.$$

Basta $\delta = \varepsilon$.

(xii) In entrambi i casi $|f(x)| = x^2$. Basta quindi

$$\delta = \sqrt{\varepsilon}.$$

2. (i) Esiste ed è 1. Infatti, scelto $\delta = 1/2$, se $0 < |x - 3/2| < \delta$, allora $1 < x < 2$ e quindi $[x] = 1$.

(ii) Esiste ed è $1/2$. Se $|x - 3/2| < 1/2$, allora $\{x\} = x - 1$, dunque

$$\left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| = \left| x - \frac{3}{2} \right|.$$

Basta scegliere $\delta = \min\{1/2, \varepsilon\}$.

(iii) Non esiste. Supponiamo, per assurdo, che esista L e applichiamo la definizione con $\varepsilon = 1/3$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente e scegliamo

$$0 < t < \min\{\delta, 1\}.$$

Allora $0 < |t|, |-t| < \delta$ e

$$[t] = 0, \quad [-t] = -1,$$

perciò

$$|L| < \frac{1}{3}, \quad |-1 - L| < \frac{1}{3}.$$

Ne seguirebbe

$$1 = |0 - (-1)| \leq |L| + |L + 1| < \frac{2}{3},$$

assurdo.

(iv) Non esiste. Supponiamo, per assurdo, che esista L e applichiamo la definizione con $\varepsilon = 1/4$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente e scegliamo

$$0 < t < \min\{\delta, 1/4\}.$$

Poiché $\{t\} = t$ e $\{-t\} = 1 - t$, si avrebbe

$$|t - L| < \frac{1}{4}, \quad |1 - t - L| < \frac{1}{4}.$$

Quindi

$$1 - 2t = |t - (1 - t)| < \frac{1}{2},$$

in contraddizione con $t < 1/4$.

(v) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1/3$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente e scegliamo $0 < t < \delta$. Allora

$$\frac{t^+}{t} = 1, \quad \frac{(-t)^+}{-t} = 0,$$

perciò

$$|1 - L| < \frac{1}{3}, \quad |L| < \frac{1}{3},$$

e dunque $1 < 2/3$, assurdo.

- (vi) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1/3$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente e scegliamo $0 < t < \min\{\delta, 1\}$. Allora

$$[1 - t] = 0, \quad [1 + t] = 1,$$

e la definizione darebbe

$$|L| < \frac{1}{3}, \quad |1 - L| < \frac{1}{3},$$

da cui $1 < 2/3$, assurdo.

- (vii) Esiste ed è -1 . Se $0 < |x - 1| < 1$, allora $0 < x < 2$, $x \neq 1$, e

$$[x] + [-x] = -1.$$

- (viii) Esiste ed è 0 . Se $|x| < 1$, allora

$$||x|[x]| \leq |x|.$$

Basta $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$.

- (ix) Esiste ed è 0 , poiché

$$0 \leq |x|\{x\} < |x|.$$

Basta $\delta = \varepsilon$.

- (x) Esiste ed è 0 , poiché in ogni caso

$$|f(x)| = |x|.$$

Basta $\delta = \varepsilon$.

- (xi) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1/2$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente. Per n sufficientemente grande,

$$x = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$$

soddisfano $0 < |x|, |y| < \delta$, ma $f(x) = 1$ e $f(y) = -1$. Quindi

$$2 = |1 - (-1)| \leq |1 - L| + |-1 - L| < 1,$$

assurdo.

- (xii) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1/4$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente. Per n sufficientemente grande, ponendo

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \frac{1}{n + 1/2},$$

si ha $0 < x, y < \delta$ e

$$\left\{\frac{1}{x}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{1}{y}\right\} = \frac{1}{2}.$$

La definizione implicherebbe

$$|L| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{1}{2} - L\right| < \frac{1}{4},$$

da cui $1/2 < 1/2$, assurdo.

- (xiii) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1/8$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente. Per n sufficientemente grande,

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{n + 1/2}}$$

soddisfano $0 < x, y < \delta$. Inoltre

$$f(x) = \varphi(n) = 0, \quad f(y) = \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Quindi

$$\frac{1}{4} \leq |L| + \left| \frac{1}{4} - L \right| < \frac{1}{4},$$

assurdo.

- (xiv) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1/3$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente. Scegliendo n sufficientemente grande,

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \frac{1}{n + 1/2}$$

soddisfano $0 < x, y < \delta$. Inoltre $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$, poiché $n + 1/2$ non è naturale. Pertanto

$$1 \leq |1 - L| + |L| < \frac{2}{3},$$

assurdo.

- (xv) Esiste ed è 0, perché per ogni x

$$|f(x)| \leq |x|.$$

Basta $\delta = \varepsilon$.

- (xvi) Non esiste. Supponiamo che esista L e fissiamo $\varepsilon = 1$. Sia $\delta > 0$ il numero corrispondente. Per n sufficientemente grande,

$$x = \frac{1}{2n}, \quad y = \frac{1}{2n + 1}$$

soddisfano $0 < x, y < \delta$, mentre

$$f(x) = 1, \quad f(y) = -1.$$

Quindi

$$2 \leq |1 - L| + |-1 - L| < 2,$$

assurdo.

- 3*.** (i) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste almeno un $\delta > 0$ che soddisfa (*); quindi $\delta_*(\varepsilon) > 0$.

Viceversa, se $\delta_*(\varepsilon) > 0$, l'insieme dei $\delta > 0$ che soddisfano (*) non è vuoto, e dunque esiste un $\delta > 0$ adatto. Questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Negando l'equivalenza si ottiene immediatamente

$$L \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \exists \varepsilon_0 > 0 : \delta_*(\varepsilon_0) = 0.$$

(ii)

$$(a) \quad |f(x) - 5| = 3|x - 2|, \quad \boxed{\delta_*(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$$(b) \quad |f(x)| = |x - 2|^{1/2}, \quad \boxed{\delta_*(\varepsilon) = \varepsilon^2}.$$

$$(c) \quad \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0).$$

Quindi

$$\delta_*(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \\ +\infty, & \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(d) \quad |x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Ponendo $r = |x - 1|$, sul lato destro $x = 1 + r$ e

$$|x^2 - 1| = 2r + r^2.$$

Il valore ε viene raggiunto per $r = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$. Sul lato sinistro la distanza dal primo punto in cui $|x^2 - 1| = \varepsilon$ non è minore di questa. Pertanto

$$\delta_*(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1.$$