

AM110 – Esercizi su funzioni, preimmagini e modulo

Lezione del 28/9/2026

(seconda versione)

Esercizi

1. Si considerino le tre funzioni

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2,$$

$$h : \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2.$$

Stabilire quali sono iniettive, determinarne le immagini e spiegare perché f, g, h sono tre funzioni diverse.

2. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-1)/(x+1)$. Mostrare che f è iniettiva, determinare $\text{im}(f)$ e definire la funzione inversa

$$f^{-1} : \text{im}(f) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Determinare $\text{im}(f)$ e stabilire se f è iniettiva e se è suriettiva. Confrontare f con la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 1$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Determinare

$$f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}), \quad f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : y < 1\}), \quad f^{-1}(\{0\}).$$

5. Siano $f : A \rightarrow B$ e $C, D \subseteq B$. Dimostrare che

$$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D).$$

Dedurre che $f^{-1}(B \setminus C) = A \setminus f^{-1}(C)$.

6. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Esprimere mediante χ_A e χ_B le funzioni caratteristiche di $A \setminus B$ e di $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

7. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che $\chi_A = \chi_B$ se e solo se $A = B$. Più in generale, dimostrare che

$$A \subseteq B \iff \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

8. Risolvere, al variare di $a \geq 0$, l'equazione $|x| = a$ e le disequazioni $|x| < a, |x| > a$. Fare poi lo stesso con $|x - b|, b \in \mathbb{R}$, e interpretare geometricamente i risultati sulla retta reale.

9. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1/x$. Stabilire se f è iniettiva, determinare $f^{-1}(\{2\})$ e $f^{-1}(\{-2\})$ e trovare due elementi distinti che abbiano la stessa immagine.

10. Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $|x - a| = |x - b|$. Determinare poi quelli per cui $|x - a| < |x - b|$.

Soluzioni

1. f non è iniettiva, poiché $f(x) = f(-x)$; g e h sono invece iniettive. Inoltre $\text{im}(f) = \text{im}(g) = \text{im}(h) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. Le tre funzioni sono diverse perché hanno domini diversi (e una funzione comprende, in particolare, il proprio dominio).

2. Se $f(x) = f(y)$, allora $(x-1)(y+1) = (y-1)(x+1)$, da cui $2x = 2y$ e quindi $x = y$: f è iniettiva. Posto $y = f(x)$,

$$y = \frac{x-1}{x+1} \iff x = \frac{1+y}{1-y},$$

che ha senso se e solo se $y \neq 1$. Dunque $\text{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1+y}{1-y}.$$

3. Per $x \neq 1$ si ha $f(x) = x+1$. Quindi $\text{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; f è iniettiva ma non suriettiva come funzione a valori in $\mathbb{R}$. La funzione $g(x) = x+1$ coincide con f per $x \neq 1$, ma g è definita anche in $x = 1$ e $g(1) = 2$: dunque $f \neq g$.

4. Dalla definizione di preimmagine:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{0\}, & f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}) &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}, \\ f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} : y < 1\}) &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, & f^{-1}(\{0\}) &= \{-1/2\}. \end{aligned}$$

5. Per $x \in A$,

$$x \in f^{-1}(C \setminus D) \iff f(x) \in C \setminus D \iff f(x) \in C \text{ e } f(x) \notin D,$$

che equivale a $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Prendendo $D = C$ e $C = B$ nella formula, oppure direttamente dalla definizione, si ottiene $f^{-1}(B \setminus C) = A \setminus f^{-1}(C)$.

6. Si ha

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B).$$

Inoltre

$$\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B,$$

oppure, equivalentemente, $\chi_{A \Delta B} = (\chi_A - \chi_B)^2$.

7. Se $A = B$, chiaramente $\chi_A = \chi_B$. Viceversa, se $\chi_A = \chi_B$ e $x \in A$, allora $\chi_A(x) = 1$, quindi $\chi_B(x) = 1$ e $x \in B$; dunque $A \subseteq B$, e scambiando A, B si ottiene $A = B$.

Se $A \subseteq B$, allora $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ per ogni x . Viceversa, se tale disuguaglianza vale e $x \in A$, allora $1 = \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$; poiché χ_B assume solo i valori 0, 1, segue $\chi_B(x) = 1$, cioè $x \in B$.

8. Se $a > 0$,

$$\begin{aligned} |x| = a &\iff x = \pm a, & |x| < a &\iff -a < x < a, \\ |x| > a &\iff x < -a \text{ oppure } x > a. \end{aligned}$$

Per $a = 0$, rispettivamente, si ottengono $x = 0$, nessuna soluzione, e $x \neq 0$. Sostituendo x con $x - b$ si ottengono gli analoghi risultati centrati in b : ad esempio $|x - b| < a$ significa che la distanza di x da b è minore di a .

9. f non è iniettiva: ad esempio $f(2) = f(1/2) = 5/2$. Inoltre

$$x + \frac{1}{x} = 2 \iff (x-1)^2 = 0, \quad x + \frac{1}{x} = -2 \iff (x+1)^2 = 0,$$

perciò $f^{-1}(\{2\}) = \{1\}$ e $f^{-1}(\{-2\}) = \{-1\}$.

10. Poiché entrambi i membri sono non negativi, $|x - a| = |x - b|$ equivale a $(x - a)^2 = (x - b)^2$, quindi $(b - a)(2x - a - b) = 0$. Essendo $a < b$, segue

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Analogamente,

$$|x - a| < |x - b| \iff (x - a)^2 < (x - b)^2 \iff (b - a)(2x - a - b) < 0,$$

e quindi, poiché $b - a > 0$,

$$x < \frac{a+b}{2}.$$