

AM110 – Esercizi sul principio di induzione

Lezione del 30/9/2026

1. Dimostrare che

$$n \leq n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Dimostrare che $n^2 + n$ è pari per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$n^2 + n = 2m.$$

3. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}_0$ tale che

$$n^3 - n = 3m.$$

4. Sia $\mathcal{P}(n)$ una proposizione.

- (i) Supponiamo che $\mathcal{P}(3)$ sia vera e che

$$\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$.

- (ii) Più in generale, sia $N \in \mathbb{Z}$ e sia $\mathcal{P}(n)$ definita per gli interi $n \geq N$. Supponiamo che $\mathcal{P}(N)$ sia vera e che

$$\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq N$. Dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq N$.

5. Siano $x, y \in \mathbb{Q}$, dimostrare che

$$nx + y \in \mathbb{Q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

6. Dimostrare che

$$n^2 \geq 2n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

7. Si supponga che $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(2)$ siano vere e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) \text{ e } \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2).$$

Dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

8. Mostrare che dalle sole ipotesi

$$\mathcal{P}(1) \text{ vera}, \quad \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+2)$$

non segue, in generale, che $\mathcal{P}(n)$ sia vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Costruire un controesempio.

9. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $q \in \mathbb{N}_0$ tale che vale una delle due alternative

$$n = 2q, \quad n = 2q + 1.$$

10. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $q \in \mathbb{N}_0$ tale che vale una delle tre alternative

$$n = 3q, \quad n = 3q + 1, \quad n = 3q + 2.$$

11. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$n(n+1)(n+2)$$

è un multiplo di 6.

12. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$n^3 + 5n = 6m.$$

13. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}_0$ tale che

$$n^5 - n = 5m.$$

14. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}_0$ tale che

$$n^5 - n = 30m.$$

15. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esistono $p, q \in \mathbb{N}_0$ tali che

$$n = 2p + 3q.$$

16. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, esistono $p, q \in \mathbb{N}_0$ tali che

$$n = 3p + 5q.$$

17. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 18$, esistono $p, q \in \mathbb{N}_0$ tali che

$$n = 4p + 7q.$$

18. Sia $m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq m(m-1)$$

può essere scritto nella forma

$$n = pm + q(m+1)$$

con $p, q \in \mathbb{N}_0$.

19. Dimostrare che l'insieme

$$I := \{1\} \cup \{m+1 \mid m \in \mathbb{N}\},$$

è un sottoinsieme induttivo di $\mathbb{N}$ e quindi che $I = \mathbb{N}$. Ne segue che *per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ esiste (ed è unico) $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = m+1$.*

20. **Dov'è l'errore?** Si vuole “dimostrare” che

$$n \leq 2n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il passo induttivo è corretto: se $n \leq 2n - 2$, allora $n \geq 2$, e quindi

$$n+1 \leq 2n = 2(n+1) - 2.$$

Dov'è l'errore nella dimostrazione?

21. **Dov'è l'errore?** Si afferma: “presi comunque n numeri reali, essi sono tutti uguali”.

Per $n = 1$ l'affermazione è vera. Supponiamo che sia vera per n numeri e consideriamo

$$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}.$$

Per ipotesi induttiva $x_1, \dots, x_n$ sono tutti uguali; ancora per ipotesi induttiva $x_2, \dots, x_{n+1}$ sono tutti uguali. Dunque tutti gli $n+1$ numeri sono uguali.

Dov'è l'errore?

Soluzioni

1. Per $n = 1$ si ha $1 \leq 1$. Se $n \leq n^2$, allora

$$n + 1 \leq n^2 + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

2. Per $n = 1$, $n^2 + n = 2$. Se $n^2 + n = 2m$, allora

$$(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + n + 2(n + 1) = 2(m + n + 1),$$

e $m + n + 1 \in \mathbb{N}$.

3. Per $n = 1$ si ha $n^3 - n = 0$. Se $n^3 - n = 3m$, allora

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 - n + 3n(n + 1) = 3(m + n(n + 1)).$$

4. (i) Basta applicare il principio di induzione alla proposizione

$$\mathcal{Q}(k) := \mathcal{P}(k + 2), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Infatti $\mathcal{Q}(1) = \mathcal{P}(3)$ e $\mathcal{Q}(k) \Rightarrow \mathcal{Q}(k + 1)$.

(ii) Si pone

$$\mathcal{Q}(k) := \mathcal{P}(N + k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Allora $\mathcal{Q}(1) = \mathcal{P}(N)$ e il passo induttivo per $\mathcal{Q}$ segue da quello per $\mathcal{P}$. Quindi $\mathcal{P}(N + k - 1)$ vale per ogni $k \in \mathbb{N}$, cioè $\mathcal{P}(n)$ vale per ogni intero $n \geq N$.

5. Scriviamo $x = a/b$, con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ la tesi è ovvia. Se $nx \in \mathbb{Q}$, allora

$$(n + 1)x = nx + x \in \mathbb{Q}.$$

Analogamente, fissati $x, y \in \mathbb{Q}$, per $n = 1$ si ha $x + y \in \mathbb{Q}$ e, se $nx + y \in \mathbb{Q}$, allora

$$(n + 1)x + y = (nx + y) + x \in \mathbb{Q}.$$

6. Per $n = 3$ si ha $9 \geq 7$. Supponiamo $n^2 \geq 2n + 1$. Allora

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq 4n + 2 \geq 2n + 3 = 2(n + 1) + 1.$$

7. Poniamo

$$\mathcal{Q}(n) := \mathcal{P}(n) \text{ e } \mathcal{P}(n + 1).$$

Per ipotesi $\mathcal{Q}(1)$ è vera. Se $\mathcal{Q}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{P}(n + 1)$ sono vere e quindi è vera $\mathcal{P}(n + 2)$; dunque $\mathcal{Q}(n + 1)$ è vera. Per induzione $\mathcal{Q}(n)$ vale per ogni n , e in particolare vale $\mathcal{P}(n)$ per ogni n .

8. Ad esempio, sia $\mathcal{P}(n)$ la proposizione “ n è dispari”. Allora $\mathcal{P}(1)$ è vera e

$$\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 2),$$

ma $\mathcal{P}(2)$ è falsa.

9. Per $n = 2$ c'è uguaglianza. Se $n^3 \geq 4n$, allora

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \geq 4n + 3n^2 + 3n + 1 \geq 4n + 4 = 4(n + 1).$$

10. Per $n = 1$,

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geq 1 + a^2.$$

Se $(n + a)^2 \geq n^2 + a^2$, allora

$$(n + 1 + a)^2 = (n + a)^2 + 2(n + a) + 1 \geq n^2 + a^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 + a^2,$$

poiché $a \geq 0$.

11. Sia $\mathcal{P}(n)$ la proposizione dell'enunciato. Per $n = 1$,

$$1 = 2 \cdot 0 + 1.$$

Supponiamo vera $\mathcal{P}(n)$. Se $n = 2q$, allora $n + 1 = 2q + 1$; se invece $n = 2q + 1$, allora

$$n + 1 = 2(q + 1).$$

In entrambi i casi $\mathcal{P}(n + 1)$ è vera.

12. Per $n = 1$ si ha $1 = 3 \cdot 0 + 1$. Supponiamo vera la tesi per n . Se

$$n = 3q, \quad 3q + 1, \quad \text{o} \quad 3q + 2,$$

allora rispettivamente

$$n + 1 = 3q + 1, \quad 3q + 2, \quad \text{o} \quad 3(q + 1).$$

Quindi la tesi vale per $n + 1$.

13. Usiamo l'induzione forte. Per $n = 2$ e $n = 3$:

$$2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, \quad 3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1.$$

Se $n \geq 4$ e la tesi vale per tutti gli interi da 2 a $n - 1$, allora $n - 2 \geq 2$ e

$$n - 2 = 2p + 3q$$

per opportuni $p, q \in \mathbb{N}_0$. Ne segue

$$n = 2(p + 1) + 3q.$$

14. È sufficiente verificare tre casi iniziali:

$$8 = 3 + 5, \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 10 = 5 \cdot 2.$$

Se $n = 3p + 5q$, allora

$$n + 3 = 3(p + 1) + 5q.$$

Applicando l'induzione separatamente a partire da 8, 9, 10, si ottiene la tesi per ogni $n \geq 8$.

15. Per $n = 1$ il prodotto è 6. Supponiamo che $n(n + 1)(n + 2)$ sia un multiplo di 6. Allora

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) = n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1)(n + 2).$$

Il primo addendo è un multiplo di 6 per ipotesi induttiva; il secondo lo è perché tra $n + 1$ e $n + 2$ uno è pari. Quindi anche $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ è un multiplo di 6.

16. Definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\mathcal{P}}(n) := \begin{cases} \mathcal{P}(n), & 1 \leq n \leq N, \\ \mathcal{P}(N), & n > N. \end{cases}$$

La proposizione $\tilde{\mathcal{P}}(1)$ è vera. Inoltre $\tilde{\mathcal{P}}(n) \Rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(n + 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: per $n < N$ è l'ipotesi, mentre per $n \geq N$ è immediato. Il principio di induzione dà dunque $\tilde{\mathcal{P}}(n)$ per ogni n , e in particolare $\mathcal{P}(n)$ per $1 \leq n \leq N$.

17. Per $n = 1$ c'è uguaglianza. Supponiamo, con $1 \leq n \leq 8$, che

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Poiché $x \geq -1$, si ha $1+x \geq 0$ e quindi

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Per induzione finita la disuguaglianza vale per $n = 1, \dots, 9$.

18. Per $n = 1$ la tesi è l'ipotesi $f(1) = 1$. Se $f(n) = n$, allora

$$f(n+1) = f(n) + 1 = n + 1.$$

Quindi $f(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

19. Poiché $\mathbb{N}$ è induttivo, $I \subseteq \mathbb{N}$. Per definizione di I , $1 \in I$. Se $n \in I$ e $n \neq 1$, $n = m + 1$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ quindi $n + 1 = (m + 1) + 1 \in \mathbb{N}$: quindi I è induttivo e $I = \mathbb{N}$. L'affermazione finale segue immediatamente.

20. Manca il caso iniziale: per $n = 1$ la proposizione afferma

$$1 \leq 0,$$

che è falsa. Il fatto che il passo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ sia corretto non basta.

21. Il passo induttivo non funziona nel passaggio da $n = 1$ a $n = 2$. In quel caso i due gruppi

$$x_1, \quad x_2$$

non hanno alcun elemento in comune. Solo per $n \geq 2$ i gruppi $x_1, \dots, x_n$ e $x_2, \dots, x_{n+1}$ si sovrappongono.