

AM110 – Esercizi su segno e funzioni monotòne

Esercizi aggiuntivi sulla Sez 1.1

Segno, parte positiva e parte negativa

1. Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$(-x)^+ = x^-, \quad (-x)^- = x^+.$$

2. Dimostrare che $x^+x^- = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Più precisamente, mostrare che se $u, v \geq 0$,

$$x = u - v, \quad uv = 0,$$

allora necessariamente $u = x^+$ e $v = x^-$.

3. Dimostrare che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max\{x, y\} = y + (x - y)^+, \quad \min\{x, y\} = x - (x - y)^+.$$

4. Dimostrare che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y),$$

e, se $y \neq 0$,

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{y}\right) = \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y).$$

Funzioni monotòne

5. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Stabilire, al variare di a , quando f è crescente, decrescente, strettamente crescente o strettamente decrescente.

6. Dimostrare direttamente dalla definizione che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, è strettamente crescente.

7. Dimostrare che la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

è strettamente crescente.

8. Studiare la monotonia di

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

separatamente sugli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

9. Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ crescenti. Dimostrare che $f + g$ è crescente. Se una delle due è strettamente crescente, mostrare che $f + g$ è strettamente crescente.

10. Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ crescenti e non negative. Dimostrare che la funzione

$$x \in A \mapsto f(x)g(x)$$

è crescente.

11. Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ crescenti. Dimostrare che anche le funzioni

$$x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$$

sono crescenti.

12. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Caratterizzare, in termini dell'insieme A , quando la funzione caratteristica χ_A è crescente e quando è decrescente.

Problemi

1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona e pari, cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che f è costante.
2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e supponiamo che

$$f(f(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e sia $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che ciascuno degli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$$

ha la seguente proprietà: se contiene due punti $x < y$, allora contiene ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $x < z < y$.
Vale la stessa proprietà per l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\}?$$

Soluzioni

Segno, parte positiva e parte negativa

1. Dalle definizioni,

$$(-x)^+ = \frac{|x| - x}{2} = x^-, \quad (-x)^- = \frac{|x| + x}{2} = x^+.$$

2. Se $x \geq 0$, allora $x^+ = x$ e $x^- = 0$; se $x \leq 0$, allora $x^+ = 0$ e $x^- = -x$. In entrambi i casi $x^+x^- = 0$.

Siano ora $u, v \geq 0$, $x = u - v$ e $uv = 0$. Se $u > 0$, allora $v = 0$, quindi $x = u > 0$ e perciò $u = x^+$, $v = x^-$. Se $v > 0$, analogamente $u = 0$, $x = -v < 0$ e ancora $u = x^+$, $v = x^-$. Se $u = v = 0$, allora $x = 0$ e la conclusione è immediata.

3. Se $x \geq y$, allora $(x - y)^+ = x - y$, e quindi

$$y + (x - y)^+ = x, \quad x - (x - y)^+ = y.$$

Se $x \leq y$, allora $(x - y)^+ = 0$, e le due formule danno rispettivamente y e x .

4. Se uno fra x, y è nullo, la prima formula è immediata. Se entrambi sono non nulli, il segno del prodotto è positivo quando x, y hanno lo stesso segno e negativo quando hanno segno opposto; quindi $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$.

Se $y \neq 0$, allora $\operatorname{sgn}(y) = \pm 1$ e dunque $(\operatorname{sgn} y)^{-1} = \operatorname{sgn} y$. Applicando la formula del prodotto a xy^{-1} si ottiene

$$\operatorname{sgn}(x/y) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y^{-1}) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y).$$

Funzioni monotone

5. Se $x \leq y$, allora $ax + b \leq ay + b$ quando $a \geq 0$, mentre $ax + b \geq ay + b$ quando $a \leq 0$. Dunque f è crescente per $a \geq 0$ e decrescente per $a \leq 0$. Se $a > 0$ è strettamente crescente; se $a < 0$ è strettamente decrescente; se $a = 0$ è costante e quindi non strettamente monotona.

6. Se $x < y$,

$$y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2).$$

Il primo fattore è positivo. Inoltre

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$$

a meno che $x = y = 0$, caso incompatibile con $x < y$. Quindi $y^3 - x^3 > 0$.

7. Siano $x < y$. Se $0 \leq x < y$, allora

$$\frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} > 0.$$

Se $x < y \leq 0$, allora $f(t) = t/(1-t)$ e

$$\frac{y}{1-y} - \frac{x}{1-x} = \frac{y-x}{(1-x)(1-y)} > 0.$$

Infine, se $x < 0 < y$, si ha $f(x) < 0 < f(y)$. Quindi f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

8. Se $0 \leq x < y$, allora $x^2 < y^2$, perciò $1 + x^2 < 1 + y^2$ e dunque

$$\frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{1+y^2}.$$

Quindi f è strettamente decrescente su $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Se $x < y \leq 0$, allora $|x| > |y|$, quindi $x^2 > y^2$ e si ottiene $f(x) < f(y)$: f è strettamente crescente su $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

9. Se $x \leq y$, allora $f(x) \leq f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$; sommando,

$$(f+g)(x) \leq (f+g)(y).$$

Se, ad esempio, f è strettamente crescente e $x < y$, allora $f(x) < f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$, dunque $(f+g)(x) < (f+g)(y)$.

10. Sia $x \leq y$. Poiché f, g sono crescenti e non negative,

$$f(x)g(x) \leq f(y)g(x) \leq f(y)g(y),$$

quindi fg è crescente.

11. Sia $x \leq y$. Poiché $f(x) \leq f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$, entrambi i numeri $f(x), g(x)$ sono minori o uguali di $\max\{f(y), g(y)\}$; dunque

$$\max\{f(x), g(x)\} \leq \max\{f(y), g(y)\}.$$

Analogamente, $\min\{f(x), g(x)\} \leq f(y)$ e $\min\{f(x), g(x)\} \leq g(y)$, da cui

$$\min\{f(x), g(x)\} \leq \min\{f(y), g(y)\}.$$

12. χ_A è crescente se e solo se vale

$$x \in A, y \geq x \implies y \in A.$$

Infatti questa condizione è necessaria perché $1 = \chi_A(x) \leq \chi_A(y)$; ed è sufficiente perché, se $x \leq y$, l'unico caso non automatico è $x \in A$, che implica $y \in A$.

Analogamente, χ_A è decrescente se e solo se

$$x \in A, y \leq x \implies y \in A.$$

Soluzioni dei problemi

1. Supponiamo dapprima che f sia crescente. Se $x \geq 0$, allora $-x \leq 0 \leq x$, quindi

$$f(-x) \leq f(0) \leq f(x).$$

Poiché $f(-x) = f(x)$, tutte le disuguaglianze sono uguaglianze e $f(x) = f(0)$. Per $x \leq 0$ si applica lo stesso argomento a $-x \geq 0$. Quindi f è costante. Il caso in cui f sia decrescente è analogo, con i versi delle disuguaglianze invertiti.

2. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Se fosse $f(x) > x$, poiché f è crescente si avrebbe

$$f(f(x)) \geq f(x) > x,$$

in contraddizione con $f(f(x)) = x$. Se fosse $f(x) < x$, applicando ancora la monotonia si avrebbe

$$f(f(x)) \leq f(x) < x,$$

di nuovo assurdo. Quindi $f(x) = x$.

3. Supponiamo che $x < z < y$. Se $f(x) \leq a$ e $f(y) \leq a$, dalla crescita di f segue

$$f(x) \leq f(z) \leq f(y) \leq a,$$

quindi z appartiene a $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \leq a\}$. Analogamente, se $f(x) \geq a$ e $f(y) \geq a$, allora

$$a \leq f(x) \leq f(z) \leq f(y),$$

e quindi z appartiene a $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \geq a\}$.

La stessa proprietà vale anche per $\{t \in \mathbb{R} : f(t) = a\}$: se $f(x) = f(y) = a$ e $x < z < y$, allora

$$a = f(x) \leq f(z) \leq f(y) = a,$$

perciò $f(z) = a$.