

AM110 – Esercizi su somme geometriche e binomio di Newton

1. Sia (a_k) una famiglia di numeri reali. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

Scrivere anzitutto esplicitamente i termini della somma e osservare le cancellazioni; dare poi una dimostrazione per induzione su n .

2. Calcolare

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

3. Calcolare, per $x \neq 1$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} x^{k-2}.$$

4. Calcolare

$$\sum_{k=0}^n x^{2k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^n x^{2k+1},$$

distinguendo opportunamente i casi $x = 1$ e $x = -1$. Verificare poi, sommando le due espressioni ottenute, la formula per

$$\sum_{k=0}^{2n+1} x^k.$$

5. Calcolare esplicitamente

$$\sum_{k=0}^6 2^{2k+1}.$$

6. Calcolare

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k},$$

distinguendo gli eventuali casi particolari.

7. Determinare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, tutti i numeri reali x tali che

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 0.$$

8. Calcolare, per $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n x^{n-2k},$$

distinguendo gli eventuali casi particolari.

9. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, e $n \in \mathbb{N}$. Posto

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k,$$

moltiplicare S per $x - y$, distribuire il prodotto nelle due somme ottenute ed effettuare un opportuno cambio d'indice in una di esse. Dedurre che

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

10. Usando l'esercizio precedente, mostrare che, se $x > y > 0$ e $n \geq 2$, allora

$$0 < x^n - y^n < n(x - y)x^{n-1}.$$

11. **Problema.** Sia $x \neq 1$ e

$$S_n = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}.$$

Scrivere xS_n , effettuare un opportuno cambio d'indice e confrontare S_n e xS_n . Dedurre che

$$S_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

12. Usando il binomio di Newton, calcolare

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

13. Dimostrare che, per $n \geq 1$,

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pari}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ dispari}}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

14. Siano $m, n \in \mathbb{N}_0$ e $0 \leq k \leq m+n$. Determinare il coefficiente di x^k nello sviluppo di

$$(1+x)^n(1+x)^m$$

in due modi diversi e dedurre l'identità

$$\sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(k, n)} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

15. Usando il binomio di Newton, mostrare che, per $n \geq 2$ e $x > 0$,

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Confrontare questa dimostrazione con quella per induzione della disuguaglianza di Bernoulli.

16. **Problema.** Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Suggerimento: considerare il coefficiente di x^n in

$$(1+x)^n(1+x)^n$$

e usare la simmetria $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Soluzioni sintetiche

1. Scrivendo i termini,

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0.$$

Per induzione: per $n = 0$ la formula è ovvia. Se vale per n , allora

$$\sum_{k=0}^{n+1} (a_{k+1} - a_k) = (a_{n+1} - a_0) + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_0.$$

- 2.

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

3. Ponendo $j = k - 2$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} x^{k-2} = \sum_{j=0}^{n-1} x^j = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

4. Se $x^2 \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n x^{2k} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}, \quad \sum_{k=0}^n x^{2k+1} = x \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

Per $x = 1$ valgono rispettivamente $n+1$ e $n+1$; per $x = -1$, $n+1$ e $-(n+1)$. Sommando,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} x^k = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x} \quad (x \neq 1).$$

- 5.

$$\sum_{k=0}^6 2^{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^6 4^k = 2 \frac{4^7 - 1}{3} = 10922.$$

6. È una somma geometrica di ragione $-x^2$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}.$$

Per $x \in \mathbb{R}$ non vi sono casi eccezionali, poiché $1 + x^2 > 0$.

7. Se $x = 1$ la somma vale $n+1$. Se $x \neq 1$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Dunque deve essere $x^{n+1} = 1$. Per $x \in \mathbb{R}$ ciò dà, oltre a $x = 1$, solo $x = -1$ quando n è dispari. Quindi:

$$x = -1 \quad \text{se } n \text{ è dispari}; \quad \text{nessuna soluzione se } n \text{ è pari}.$$

8. Per $x^2 \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n x^{n-2k} = x^n \sum_{k=0}^n (x^{-2})^k = \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^2 - 1}.$$

Se $x = 1$ la somma vale $n+1$; se $x = -1$ vale

$$(n+1)(-1)^n.$$

9.

$$(x-y)S = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1}.$$

Cambiando indice nella seconda somma,

$$(x-y)S = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^k = x^n - y^n.$$

10. Dall'esercizio precedente,

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k > 0.$$

Poiché $0 < y < x$, ogni termine della somma è $\leq x^{n-1}$ e, per $n \geq 2$, almeno uno è strettamente minore; quindi

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k < nx^{n-1}.$$

Moltiplicando per $x-y > 0$ si ottiene la tesi.

11.

$$S_n = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}, \quad xS_n = x + 2x^2 + \cdots + nx^n.$$

Sottraendo,

$$(1-x)S_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n.$$

Quindi

$$S_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

12. Dal binomio di Newton,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

mentre

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

(per $n \geq 1$).

13. Se

$$E = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pari}}} \binom{n}{k}, \quad O = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ dispari}}} \binom{n}{k},$$

dall'esercizio precedente si ha

$$E + O = 2^n, \quad E - O = 0.$$

Pertanto

$$E = O = 2^{n-1}.$$

14. Il coefficiente di x^k in

$$(1+x)^n (1+x)^m$$

è

$$\sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(k, n)} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Ma

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m},$$

e quindi lo stesso coefficiente è $\binom{n+m}{k}$. Ne segue l'identità richiesta.

15. Dal binomio di Newton,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Se $n \geq 2$ e $x > 0$, la somma a destra è strettamente positiva; dunque

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Qui la disuguaglianza segue direttamente dallo sviluppo binomiale, mentre la dimostrazione di Bernoulli per induzione non richiede il binomio di Newton.

16. Applicando l'Esercizio 14 con $m = n$ e $k = n$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j}.$$

Per la simmetria dei coefficienti binomiali,

$$\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j},$$

e quindi

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2.$$