

AM110 – Esercizi su estremo superiore e inferiore

Proprietà archimedea, successioni, parte intera e parte frazionaria

Premessa. Una *successione* in A è una funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow A$, $n \mapsto a_n$ (cfr. Definizione 1.26 del testo); il suo insieme dei valori è $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Per $a < b$ poniamo

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}, \quad [a, b) = \{x : a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x : a < x \leq b\}, \quad [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}.$$

Tutti gli insiemi qui sopra sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Quando si chiede di *determinare* sup, inf, massimo o minimo, la risposta va sempre dimostrata.

Attenzione. $\{x\}$, per $x \in \mathbb{R}$, denota la *parte frazionaria* di x ; $\{a, b, \dots\}$ denota invece un *insieme*. Il significato sarà sempre chiaro dal contesto.

1. Per ciascuno degli insiemi

$$(0, 1), \quad [0, 1), \quad (0, 1], \quad [0, 1]$$

determinare, se esistono, sup, inf, max, min.

2. Sia $A = \{(n-1)/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. (i) Mostrare che 1 è un maggiorante di A . (ii) Mostrare che nessun numero < 1 è un maggiorante. (iii) Dedurre $\sup A = 1$. (iv) Determinare, se esistono, inf A , max A , min A .

3. Sia $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$. (i) Determinare, se esistono, sup A , inf A , max A , min A . (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ mostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

(iii) Mostrare che n può essere scelto in modo che la stessa disuguaglianza valga per ogni $m \geq n$.

4. Per ciascuno dei seguenti insiemi determinare, se esistono, sup, inf, max, min:

$$A_1 = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}, \quad A_2 = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad A_3 = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\},$$

$$A_4 = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}, \quad A_5 = \left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Per ciascuno degli insiemi

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1), \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1), \quad \mathbb{Q} \cap (0, 1], \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

determinare, se esistono, sup, inf, max, min.

6. Determinare, se esistono, sup, inf, max, min di

$$A = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}.$$

7. Determinare, se esistono, sup, inf, max, min di

$$A = \left\{\frac{n}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

8. Sia $\{a_n\}$ crescente ($a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n), limitata superiormente, e sia $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. (i) Mostrare che $a_n \leq s$ per ogni n . (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ trovare N con $s - \varepsilon < a_N \leq s$. (iii) Dedurre

$$s - \varepsilon < a_n \leq s \quad \forall n \geq N.$$

9. Sia $\{a_n\}$ decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n), limitata inferiormente, e sia $s = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N tale che

$$s \leq a_n < s + \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

10. Per $a_n = n/(n+1)$: (i) mostrare che $\{a_n\}$ è strettamente crescente; (ii) determinare, se esistono, sup, inf, max, min del suo insieme dei valori; (iii) dato $\varepsilon > 0$, trovare esplicitamente N tale che

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 \quad \forall n \geq N.$$

- 11.** Per $a_n = 1/n$: (i) mostrare che $\{a_n\}$ è strettamente decrescente; (ii) determinare, se esistono, sup, inf, max, min del suo insieme dei valori; (iii) dato $\varepsilon > 0$, trovare N tale che

$$0 < a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

- 12.** Per $a_n = (2n+1)/(n+1)$: (i) mostrare che $\{a_n\}$ è strettamente crescente; (ii) determinare, se esistono, sup, inf, max, min del suo insieme dei valori; (iii) dato $\varepsilon > 0$, trovare N tale che

$$2 - \varepsilon < a_n < 2 \quad \forall n \geq N.$$

- 13.** Sia $f(x) = x/(1+x)$ per $x \geq 0$. (i) Mostrare che f è strettamente crescente. (ii) Determinare, se esistono, sup, inf, max, min di $\{f(x) : x \geq 0\}$. (iii) Per ogni $\varepsilon > 0$ trovare $M > 0$ tale che

$$1 - \varepsilon < f(x) < 1 \quad \forall x \geq M.$$

- 14.** Sia $f(x) = 1/(1+x)$ per $x \geq 0$. (i) Mostrare che f è strettamente decrescente. (ii) Determinare, se esistono, sup, inf, max, min di $\{f(x) : x \geq 0\}$. (iii) Per ogni $\varepsilon > 0$ trovare $M > 0$ tale che

$$0 < f(x) < \varepsilon \quad \forall x \geq M.$$

- 15.** Sia $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e limitata superiormente, e sia $s = \sup\{f(x) : x \geq 0\}$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$s - \varepsilon < f(x) \leq s \quad \forall x \geq M.$$

- 16.** Risolvere in $\mathbb{R}$: (i) $[2x] = 3$; (ii) $[x] = [2x]$; (iii) $\{x\} = 3/4$. Per ciascun insieme delle soluzioni determinare, se esistono, sup, inf, max, min.

- 17.** Sia $x \in \mathbb{R}$. Determinare, distinguendo i casi necessari,

$$[x] + [-x], \quad \{x\} + \{-x\}.$$

In particolare mostrare che $[x] + [-x] \in \{-1, 0\}$.

- 18.** Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1,$$

e precisare quando vale ciascuna delle due possibilità $[x + y] = [x] + [y]$ e $[x + y] = [x] + [y] + 1$, in termini di $\{x\} + \{y\}$.

- 19.** Siano $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. (i) Dimostrare

$$[nx] = n[x] + [n\{x\}].$$

(ii) Dedurre $n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n - 1$. (iii) Stabilire quando valgono le uguaglianze.

- 20.** Siano

$$A = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{\{x\}(1 - \{x\}) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determinare, se esistono, sup, inf, max, min di A e di B .

Suggerimento per B: porre $t = \{x\} \in [0, 1)$ e usare

$$t(1 - t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$