

Esercizio sulle somme finite con indice in $\mathbb{Z}$

Esercizio. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, e siano dati numeri reali a_k , $m \leq k \leq n$. Si definisce ricorsivamente

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m,$$

e, per $n > m$,

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k.$$

Dimostrare che:

(i)

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{m+j};$$

(ii) se $m \leq p < n$,

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k;$$

(iii) per ogni $h \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m+h}^{n+h} a_{j-h}.$$

Confrontare questa formula con il Lemma sui cambi di indice nelle somme finite nelle *Note e commenti*, precisando in che senso essa lo generalizza;

(iv)

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=-n}^{-m} a_{-j};$$

(v) se $b_k \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{k=m}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=m}^n a_k + \beta \sum_{k=m}^n b_k.$$

Soluzione.

In tutti i punti useremo il principio di induzione, applicato al numero $q := n - m \in \mathbb{N}_0$ di incrementi necessari per passare dall'indice iniziale m all'indice finale n .

- (i) Fissato $m \in \mathbb{Z}$, dimostriamo la formula per induzione su $q = n - m$. Se $q = 0$, cioè $n = m$, si ha

$$\sum_{k=m}^m a_k = a_m = \sum_{j=0}^0 a_{m+j}.$$

Supponiamo ora che la formula valga per $n = m + q$. Per la definizione ricorsiva,

$$\sum_{k=m}^{m+q+1} a_k = a_{m+q+1} + \sum_{k=m}^{m+q} a_k = a_{m+q+1} + \sum_{j=0}^q a_{m+j} = \sum_{j=0}^{q+1} a_{m+j}.$$

La tesi segue per induzione.

- (ii) Fissati $m \leq p$, dimostriamo la formula per induzione su $r = n - p \geq 1$. Se $r = 1$, dalla definizione,

$$\sum_{k=m}^{p+1} a_k = a_{p+1} + \sum_{k=m}^p a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{p+1} a_k.$$

Supponiamo la formula vera per un certo $n \geq p + 1$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} a_k &= a_{n+1} + \sum_{k=m}^n a_k \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k \\ &= \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{n+1} a_k, \end{aligned}$$

e la tesi segue per induzione.

- (iii) Fissati $m, h \in \mathbb{Z}$, procediamo per induzione su $q = n - m$. Per $q = 0$,

$$\sum_{k=m}^m a_k = a_m = \sum_{j=m+h}^{m+h} a_{j-h}.$$

Supponiamo la formula vera per $n = m + q$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m+q+1} a_k &= a_{m+q+1} + \sum_{k=m}^{m+q} a_k \\ &= a_{m+q+1} + \sum_{j=m+h}^{m+q+h} a_{j-h} \\ &= \sum_{j=m+h}^{m+q+h+1} a_{j-h}. \end{aligned}$$

Questa formula estende il Lemma sui cambi di indice delle *Note e commenti*: ponendo $p = -h$ si ritrova la traslazione dell'indice ivi considerata, ma qui gli estremi m, n possono essere interi arbitrari e non vi sono restrizioni sullo spostamento h .

- (iv) Procediamo ancora per induzione su $q = n - m$. Se $q = 0$,

$$\sum_{k=m}^m a_k = a_m = \sum_{j=-m}^{-m} a_{-j}.$$

Supponiamo la formula vera per n . Usando il punto (ii),

$$\begin{aligned} \sum_{j=-(n+1)}^{-m} a_{-j} &= \sum_{j=-(n+1)}^{-(n+1)} a_{-j} + \sum_{j=-n}^{-m} a_{-j} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{n+1} a_k. \end{aligned}$$

La tesi segue per induzione.

- (v) Fissati m, α, β e le due famiglie (a_k) e (b_k) , procediamo per induzione su $q = n - m$. Per $q = 0$ la formula è la distributività:

$$\alpha a_m + \beta b_m = \alpha \sum_{k=m}^m a_k + \beta \sum_{k=m}^m b_k.$$

Supponiamo la formula vera fino a n . Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} (\alpha a_k + \beta b_k) &= \alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1} + \sum_{k=m}^n (\alpha a_k + \beta b_k) \\ &= \alpha \left(a_{n+1} + \sum_{k=m}^n a_k \right) + \beta \left(b_{n+1} + \sum_{k=m}^n b_k \right) \\ &= \alpha \sum_{k=m}^{n+1} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n+1} b_k. \end{aligned}$$

Anche questa identità segue dunque per induzione.