AM110 – Induzione e disuguaglianze

1. Dimostrare per induzione che

$$3^n > n^3, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4.$$

2. Determinare il più piccolo $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$2^n \geq n^3, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$

e dimostrare poi la disuguaglianza per induzione.

3. Dimostrare per induzione che

$$n! \geq n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4.$$

4. Dimostrare per induzione che

$$n! \geq 2^{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. Determinare il più piccolo $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$n! > 3^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$

e dimostrare poi la disuguaglianza per induzione.

6. Posto

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

dimostrare per induzione che

$$H_n \leq \sqrt{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 7.$$

7. Dimostrare per induzione che

$$\frac{1}{3}\, n^3 \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq n^3, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. Dimostrare per induzione che, per ogni $x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

9. Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

10. Dimostrare per induzione che

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$